

Казахский государственный национальный
университет
имени аль-Фараби

УДК 519.245

На правах рукописи

Шакенов Канат Кожахметович

Решение уравнений Навье–Стокса и
задач фильтрации
методами Монте–Карло

01.01.07 – Вычислительная математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Научный консультант:
доктор физико–математических наук,
профессор Серовайский С.Я.

Республика Казахстан

Алматы

2003

год

Содержание

Введение	11
1 Некоторые факты и сведения из теории вероятностей и математической статистики	22
1.1 Определения и факты из теории вероятностей	22
1.1.1 Случайные величины	27
1.1.2 Случайные процессы	42
1.1.3 Основные понятия и задачи математической статистики	58
2 Общая схема методов Монте–Карло. Постановка задачи	72
2.1 Схема методов Монте–Карло	72
2.2 Процесс "блуждания по сферам".	78
2.2.1 Определение и простейшие свойства "блуждания по сферам"	80
2.2.2 Среднее число шагов "блуждания по сферам" до попадания в ε – окрестность плоскости.	81
2.3 Уравнения Навье–Стокса. Постановка задачи	86
2.3.1 Основные пространства	86
2.3.2 Уравнения Стокса	91
2.3.3 Стационарные уравнения Навье–Стокса	92
2.3.4 Полные уравнения Навье–Стокса	93
2.3.5 Стационарные линейризованные уравнения слабо сжимаемой жидкости	96

2.3.6	Дискретизация линеаризованных уравнений Навье – Стокса по временной переменной . . .	98
3	Решение уравнений Навье–Стокса и граничных интегральных уравнений	100
3.1	Уравнения Стокса	100
3.2	Стационарные уравнения Навье–Стокса	107
3.3	Полные уравнения Навье–Стокса	111
3.4	Об одном алгоритме методов Монте–Карло	120
3.5	Об одном методе Монте–Карло вычисления производных от решения	122
3.6	Стационарные линеаризованные уравнения слабо сжимаемой жидкости	124
3.7	Дискретизация линеаризованных уравнений Навье–Стокса по временной переменной	131
3.8	Решение граничных интегральных уравнений . . .	138
3.8.1	Постановка задачи.	138
3.8.2	Гидродинамический потенциал для плоских течений.	142
3.8.3	Построение граничных интегральных уравнений Граничные интегральные уравнения для линеаризованных стационарных задач.	148 150
3.8.4	Применение методов Монте–Карло.	155
4	Разностные аналоги уравнений Навье–Стокса	161
4.1	Разностные возмущенные уравнения Навье–Стокса	161
4.2	Аппроксимация полных возмущенных уравнений .	170
4.2.1	Дисперсия оценок.	170
4.3	Разностные аналоги уравнений Навье–Стокса . . .	172
5	Решение задач фильтрации	179
5.1	Модель Маскета–Левретта	179

5.1.1	Стационарная задача	185
5.1.2	Применение методов Монте–Карло	186
5.2	Нестационарная задача	193
5.2.1	Моделирования $\varepsilon(\delta)$ –смещенной оценки решения	193
5.3	Регулярные и вырождающиеся задачи	197
5.3.1	Применение методов Монте–Карло	199
5.4	Модель релаксационной фильтрации	206
5.4.1	Постановка начально–краевой задачи	222
5.4.2	Применение алгоритмов методов Монте – Карло	225
5.5	Методы Монте–Карло для решения одной модельной задачи фильтрации в потенциалах	226
6	Заключение	230
	Список использованных источников	231
7	Приложение	246

Список обозначений и сокращений

с.в.	случайная величина
п.н. (п.в.)	почти наверное (почти всюду)
P -п.н.	почти наверное по мере P
$P(A B)$	условная вероятность события A при условии события B
$P(A \mathfrak{R})$	условная вероятность события A при условии σ -алгебры \mathfrak{R}
$P(A \xi)$	условная вероятность события A при условии σ -алгебры, порожденной с.в. ξ
$P(A \xi = x)$	условная вероятность события A при условии, что с.в. ξ принимает значение x
$M\eta, M(\eta B)$	математические ожидания, соответствующие $P, P(A B)$
$M(\eta \mathfrak{R}), M(\eta \xi)$	математические ожидания, соответствующие $P(A \mathfrak{R}), P(A \xi)$
$M(\eta \xi = x)$	математическое ожидание, соответствующее $P(A \xi = x)$

$P_x(A)$	вероятностная мера события A соответствующая однородному марковскому процессу или однородной марковской цепи, начинающейся в точке x
M_x	символ математического ожидания, соответствующего P_x
$eff(\theta)$	эффективная оценка θ
$P(A \cap B) = P(A, B)$	вероятность пересечения событий A и B
$M(\xi, A) = \int_A \xi dP$	
$P(\xi \in dx)$	распределение с.в. ξ
$P(\xi \in dx, A)$	сужение распределения с.в. ξ на множество A
$D\xi$	дисперсия с.в. ξ
$f _D$	сужение функции f на множество D
$\mu _{\mathfrak{R}}$	сужение меры μ на σ -алгебру \mathfrak{R}
$\sigma(\mathfrak{S})$	минимальная σ -алгебра, содержащая семейство \mathfrak{S}
$\sigma(\xi_s, s \in T)$	σ -алгебра, порожденная семейством с.в. $\xi_s, s \in T$

$\bigotimes_{i=1}^n \mu_i(dx_i)$	прямое произведение мер μ_i
$\delta_x(dy)$	вероятностная мера, сосредоточенная в точке x
R^n	n -мерное евклидово пространство
$\rho(x, y)$	расстояние между точками x и y в метрическом пространстве
$\text{dist}(x, \Omega)$	расстояние между точкой x и множеством Ω в метрическом пространстве
$\partial\Omega$	граница множества Ω
$\bar{\Omega}, \Omega'$	замыкание множества Ω
x^T, x'	транспонированный вектор x
$f(-t)$	левый предел функции f в точке t
$x_n \uparrow (\downarrow)x$	монотонное стремление последовательности x_n снизу (сверху) к пределу x
$E_n \downarrow x$	монотонное стремление последовательности множеств E_n к точке x

$[x]$	целая часть числа x
δ_i^j, δ_{ij}	символ Кронекера
$Re(z)$	вещественная часть
	комплексного числа z
$Im(z)$	мнимая часть
	комплексного числа z
$\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$	единичные орты в неподвижной
	координатной системе
$\nabla \equiv \text{grad} \equiv \vec{e}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$	градиент
$\text{div}(\vec{V}) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$	дивергенция
$\text{rot } \vec{V} \equiv \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$	ротор (вихрь)
$\Delta \equiv \text{div grad} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	оператор Лапласа
$V^2 \equiv (\vec{V}, \vec{V}) = \sum_{i=1}^n V_i^2$	
$P(\vec{V}, t) = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})$	объемное гидродинамическое давление,
	местное термодинамическое давление

ν, μ	динамический коэффициент вязкости (вязкость) размерность: сила/(скорость*длина)
γ	кинематическая вязкость размерность: скорость*длина= длина*длина/время
P, p	давление в механике
P, p	вероятность
$p_c(x, s) = p_2 - p_1$	капиллярное давление
s	насыщенность
ρ	плотность
\vec{v}, \vec{u}	скорость
$\bar{k}_{0i}(s)$	относительные фазовые проницаемости
$K_0(x)$	коэффициент (тензор) фильтрации для однородной жидкости
$k_{0i} \equiv k_{0i}(s) = \frac{1}{\mu_i} \cdot \bar{k}_{0i}(s)$	относительные фазовые проницаемости для однородного изотропного грунта
m	масса
σ	коэффициент межфазного натяжения (в фильтрации)

$K_i = K_0 \cdot k_{0i}(s)$	симметричный тензор фазовой проницаемости
$k \equiv k_{01} + k_{02}$	
$K = K_1 + K_2$	(в фильтрации)
K	интегральный оператор,
k	коэффициент проницаемости в фильтрации
$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in A \\ 0 & \text{при } \omega \notin A \end{cases}$	индикатор события A
I	единичная матрица, единичный оператор, индикатор множества, количество информации
m	пористость, масса
t	время
β_c, β_m	коэффициент сжимаемости пористой среды и жидкости
β	коэффициент упругоэластичности пласта
$\chi = k/(\mu\beta)$	коэффициент пьезопроводности пласта
V_0	скорость распространения возмущения

\vec{D}	плотность сил сопротивления
\vec{J}	плотность импульса сил сопротивления
$F(t)$	функция релаксации закона фильтрации
$\Phi(t)$	функция релаксации закона сжимаемости
$[A]_\tau$	скачок величины A в момент времени $t = \tau$
$\delta(t)$	функция Дирака
$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$	функция Хевисайда
δ	сдвиг по фазе
ω	частота
$T = 2\pi/\omega$	период
V_Ω	фазовая скорость

Введение

Общее определение методов Монте–Карло. Методы Монте–Карло можно определить как методы моделирования случайных величин с целью вычисления характеристик их распределений. Моделирование случайных величин осуществляется с помощью ЭВМ. Идея моделирования случайных явлений очень стара, а что касается использования такого рода явлений для целей приближенных вычислений, то первой работой в этой области принято считать работу Холла [1] (1873 г.) о вычислении числа π с помощью случайных бросаний иглы на разграфленную параллельными линиями бумагу. Идея вычисления числа π заключается в том, чтобы экспериментально воспроизвести событие, вероятность которого выражается через число π , и приближенно оценить эту вероятность. Можно назвать также ряд более поздних работ, в которых до появления ЭВМ использовались идеи методов Монте–Карло. Но эти идеи не получили заметного развития вплоть до 1944 года, когда в связи с работами по созданию атомной бомбы Дж. фон Нейман предложил широко использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Первая работа, где этот вопрос систематически излагается, принадлежит Метрополису и Уламу [2] (1949 г.), а первые работы в СНГ по методам Монте–Карло появились в 1955 году [3], [4], [5].

Первоначально методы Монте–Карло использовались для решения задач нейтронной физики, где традиционные методы оказались малопригодными. Далее их влияние распространилось на широкий круг задач статистической физики, задачи теории массового обслуживания, задачи теории игр и математической экономики, задачи теории передачи информации при наличии помех и ряд других.

Методы Монте–Карло оказывают существенное влияние на развитие

методов вычислительной математики и при решении многих задач, успешно сочетаются с другими численными методами и дополняют их. Отметим, что их применение оправдано, в первую очередь, в тех задачах, которые допускают теоретико-вероятностное описание. Это объясняется как естественностью получения ответа с некоторой заданной вероятностью в задачах с вероятностным содержанием, так и существенным упрощением процедуры решения. Здесь уместно вспомнить задачи фильтрации. Некоторое количественное состояние и качественные характеристики и граница нефтяных областей в большинстве случаев содержат случайные величины (параметры), связанные с невозможностью определения их практически. Поэтому построение математических моделей с элементами случайности (статистики) было бы весьма полезным. Этот вопрос пока стоит открытым. Наиболее сложными этапами в настоящее время следует считать математическое описание исследуемого явления, необходимые упрощения задачи, выбор подходящего численного метода, исследование его погрешности и запись алгоритма. В тех случаях, когда имеется теоретико-вероятностное описание задачи, использование методов Монте-Карло может существенно упростить упомянутые промежуточные этапы. Как упомянуто выше, методы Монте-Карло обязаны своим появлением теории вероятностей и математической статистике, а их применения связаны с развитием ЭВМ. Полное изложение теории вероятностей и математической статистики, примыкающим к методам Монте-Карло можно найти в работах [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60]. Собственные теории методов Монте-Карло в современной трактовке были заложены в работах, в основном, Американских и Российских ученых [12], [13], [14], [15], [31], [44]. А в следующих работах рассматриваются вопросы связанные с тематикой данной диссертационной работы: моделирование распределений [1], [2], [5], [12], [13], [15], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [65], [66], [68], [69], [87], [90], [92], [93], [95]; решение систем линейных уравнений и нелинейных уравнений [5], [12], [14], [22], [31], [42], [43], [55], [57], [56], [58], [59], [65], [66], [67], [68], [69], [70], [80], [90], [94], [104], [105], [25], [23]; вычисление интегралов [5], [12], [14], [31], [32], [44], [62], [63], [64], [65], [66] [73], [74], [75], [76], [79], [83], [88]; решение интегральных уравнений [12], [13], [14], [15], [31], [32], [33], [44], [45], [61], [65], [66], [71], [73], [74], [75],[76], [72], [81], [82], [85], [87], [89], [90], [93], [96], [98], [99], [100], [101], [102], [103]; решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона, решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения и решение задачи Неймана для уравнения Пуассона [12], [13], [14], [15], [17], [18], [38], [39], [40], [41], [37],

[36], [34], [35], [19], [17], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [31], [32], [44], [60], [81], [85], [86], [87], [93], [94], [95], [97], [104], [105], [109]; оценка производных от решения перечисленных выше задач [13], [84], [120], [121]; некоторые задачи переноса нейтронов, связанные с интегральными уравнениями и цепью Маркова и задачи механики сплошной среды [3], [4], [12], [14], [15], [44], [55], [56], [33], [78], [82], [94], [95], [106], [107], [108], [109].

Актуальность и новизна темы. Теория вязких течений несжимаемой жидкости является важнейшим разделом гидромеханики. Она также является интересным, привлекательным объектом исследования не только механиков и математиков, но и математиков – прикладников, результаты исследования которых могут быть использованы непосредственно на практике. Многими математиками стран СНГ и за рубежом основательно исследована математическая модель динамики вязкой несжимаемой жидкости – уравнения Навье–Стокса. Особенно полно изучены вопросы существования, единственности, регулярности и другие свойства решений уравнений Навье–Стокса. Но в настоящее время мало достаточно эффективных и более общих, универсальных численных методов для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. На наш взгляд недостатками существующих численных методов (метод конечных разностей, метод конечных элементов, итерационные методы и т.д.) являются: во–первых, неприспособленность к областям со сложной конфигурацией; во–вторых, трудоемкость реализаций на ЭВМ; в–третьих, малая пригодность к многомерным задачам.

В данной диссертационной работе впервые с помощью алгоритмов методов Монте–Карло будут реализованы те или иные разностные схемы или процессы итераций, которые подпадают в раздел "классических" численных методов и труднореализуемых на ЭВМ. А в некоторых случаях строятся новые алгоритмы методов Монте–Карло для оценки решения и производных от решения уравнений Навье–Стокса и задач фильтрации. Как правило, нестационарная задача дискретизируется только по временной переменной, а затем полученная пространственная задача, а в большинстве случаев это задача Дирихле для уравнения эллиптического типа, решается методами Монте–Карло.

В связи с открытием новых нефтяных месторождений в республике Казахстан остро стоит проблема разработки этих месторождений. Теоретическая сторона проблемы разработки состоит из следующих этапов. во–первых, это построение математических моделей динамики углеводородов. во–вторых, это исследование задач фильтрации многофазной, однофазной

несжимаемой и слабосжимаемой жидкости в сложных многомерных областях. в-третьих, это численное решение задач фильтрации. Известно, что практическая ценность расчетов для этих задач чрезвычайно велика, так как существенная доля добываемой нефти связана с применением вторичных методов, таких, как вытеснение нефти из пласта водой или растворителями и другими воздействиями на пласт.

В настоящее время популярными являются две модели фильтрации. Их называют:

1. Модель классического упругого режима, которая описывает нестационарную "равновесную" фильтрацию. Эту модель также называют моделью Маскета-Левретта. [9].
2. Когда учитываются обмен перетоком жидкости в трещиновато – пористых и слоистых средах, многофазный обмен при фильтрации неоднородных дисперсных сред различной природы, упруговязкое свойство (реология) жидкости и насыщенного порового коллектора, тогда применяется модель релаксационной "неравновесной" фильтрации [10].

Эти задачи фильтрации обладают целым рядом специфических особенностей, затрудняющих, а иногда делающих невозможным применение стандартных численных методов, хорошо зарекомендовавших себя для других классов задач. Поэтому важно построить эффективные алгоритмы реализации математических моделей. Такими алгоритмами являются алгоритмы методов Монте-Карло. Алгоритмами методов Монте-Карло хорошо реализуются, во-первых, многомерные задачи, а во-вторых, с помощью алгоритмов методов Монте-Карло можно найти решение в отдельно взятой точке сложной области, что является весьма актуальной задачей в подземной гидромеханике. Например, определение точки наибольшего давления в нефтедобывающей области. В данной диссертационной работе автор применяет алгоритмы методов Монте-Карло для решения уравнений Навье-Стокса и обеих задач фильтрации.

Решение задач фильтрации "неклассическими" численными методами, а именно методами Монте-Карло дает ряд преимуществ по сравнению с "классическими" численными методами:

1. Несложность (эффективность) алгоритма при решении многомерных задач и физическая наглядность.
2. Возможность нахождения решения задачи в отдельно взятой точке области, возможность оценки отдельных функционалов без запоминания таблиц решения в целом.

3. Возможность эмпирической оценки погрешности результатов при достаточно широких предположениях.
4. Возможность оценки производных от решения. Для "классических" численных методов это затруднительно.
5. Простота алгоритма в смысле реализации на ЭВМ.

Небольшая точность алгоритмов Методов Монте–Карло компенсируется неточностью самих математических моделей, то есть нет особой необходимости решения задач фильтрации с большой точностью. Надо отметить, что те случайные характеристики математических моделей естественным образом описываются алгоритмами методов Монте–Карло при решении задач фильтрации. Это тоже можно отнести к преимуществу методов Монте–Карло.

Недостатком метода принято считать скорость убывания его погрешности, которая в случае конечности второго момента используемой оценки ведет себя как $O(N^{-1/2})$, где N – число моделируемых траекторий. Учет априорной информации относительно решения задачи позволяет, однако, уменьшить константу при $N^{-1/2}$. Это обстоятельство весьма важно, так как позволяет комбинировать методы Монте–Карло с другими методами и использовать приближенные решения, полученные при грубых предположениях.

Следует отметить, тем не менее, что в задачах малой ($n \leq 3$) размерности, в которых имеются априорные сведения о достаточно высокой степени гладкости решения и исходных данных, существуют менее трудоемкие, чем метод Монте–Карло, методы. Исключение здесь могут представлять случаи, когда необходимо оценить с невысокой степенью точности один или несколько функционалов.

Целью исследования является применение алгоритмов методов Монте–Карло для решения (построение цепей Маркова, вдоль которых оцениваются решения и производные от решения) задач гидродинамики, а именно: полных уравнений Навье–Стокса, возмущенных уравнений Навье–Стокса, стационарных уравнений Навье–Стокса, уравнений Ламе, граничных интегральных уравнений для линеаризованных задач теории плоских стационарных течений, а также для решения задач фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей и задач релаксационной фильтрации. Разработка новых алгоритмов методов Монте–Карло для оценки решения и производных от решения вышеуказанных задач.

Работы состоит из пяти разделов. Опишем их краткое содержание. В

первом разделе излагаются определения, основные сведения и факты из теории вероятностей и математической статистики и теория случайного блуждания, связанные с методами Монте–Карло. Необходимый минимум сведений по теории вероятностей и математической статистики заимствован из следующих работ [46], [47], [48], [49], [51], [53], [59], [54]. Основные сведения из теории вероятностей излагаются в следующем порядке. 1. Теория случайных величин: распределение непрерывных и дискретных случайных величин, группа случайных величин и совместное распределение случайных величин. 2. Теория мартингалов: определения и основные свойства. 3. Моменты случайных величин (числовые характеристики): в основном математическое ожидание и дисперсия. 4. Условное распределение случайных величин. 5. Закон больших чисел. 6. Неравенство Чебышева. 7. Центральная предельная теорема. 8. Теория случайных процессов: Марковские процессы, цепи Маркова и их свойства, критерий марковости. 9. Случайные блуждания. 10. Уравнения Колмогорова–Чепмена.

Основные сведения и факты из математической статистики излагаются в следующем порядке. 1. Основные понятия и задачи математической статистики. 2. Выборочное среднее и выборочная дисперсия. 3. Основные свойства оценок. 4. Принципы построения оценок. 5. Точечное оценивание.

Во втором разделе приводится общая схема методов Монте–Карло применительно к решению задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Описывается процесс "блуждания по сферам" и его свойства, а также постановка основных начально–краевых задач для уравнений Навье–Стокса: уравнения Стокса, стационарные уравнения Навье–Стокса, полные уравнения Навье–Стокса, стационарные линеаризованные уравнения слабо сжимаемой жидкости (стационарные уравнения Ламе из теории упругости), возмущенные уравнения Навье–Стокса, граничные интегральные уравнения для задач для нестационарных гидродинамических потоков (граничные интегральные уравнения для линеаризованных стационарных задач или плоские стационарные течения в случае линеаризации по Стоксу). Математическую постановку начально–краевых задач исследование этих задач можно найти в книгах [6], [7], [8], [9], и в данной работе рассматривается постановка задачи гидродинамики из [6], а граничные интегральные уравнения для линеаризованных задач теории плоских стационарных течений приводятся из [8].

Во третьем разделе уравнения Навье–Стокса решаются с помощью алгоритмов методов Монте–Карло, а именно: 1. Для уравнения Стокса

записывается вариационная формулировка задачи. Затем строятся численные классические алгоритмы оптимизации типа Удзавы и (или) Эрроу–Гурвица, и эти алгоритмы реализуются методами Монте–Карло. 2. Стационарные уравнения Навье–Стокса сводятся к вариационной задаче. Аппроксимация решения вариационной задачи осуществляется итерационным процессом – алгоритмом Эрроу–Гурвица. А алгоритм Эрроу–Гурвица, в свою очередь, реализуется методами Монте–Карло. 3. Для полных уравнений Навье–Стокса построим две эквивалентные вариационные задачи. Дискретизируя только по временной переменной и используя чисто явную схему и схему неявную в линейной части и явную в нелинейной части получаем две разностные (только по временной переменной) задачи. Применяя алгоритмы Удзавы и Эрроу–Гурвица к схеме неявной в линейной части и явной в нелинейной части получаем задачу Дирихле для уравнения Пуассона относительно вектора скорости жидкости на $(n + 1)$ -ом временном слое. А давление на этом же временном слое определяется явно, после оценивания первой производной от давления методами Монте–Карло. Переход на следующий временной слой осуществляется после оценки производных от решения первого и второго порядка методами Монте–Карло на этом же временном слое. Применение алгоритмов Удзавы и Эрроу–Гурвица к чисто явной схеме приведет к явному вычислению решения. 4. К стационарным линеаризованным уравнениям слабо сжимаемой жидкости (стационарным уравнениям Ламе) применяется алгоритм Удзавы. В результате получаем итерационный процесс для определения решения. Точнее, для определения вектора скорости жидкости, получаем задачу Дирихле для уравнения Пуассона для $(n + 1)$ -го номера итерации, и, в правую часть уравнения входит первая производная от давления для n -го номера итерации. Давление для $(n + 1)$ -го номера итерации определяется явно, если известна первая производная от вектора скорости жидкости для этого же номера итерации, что затрудняет реализовать традиционным способом итерационный процесс (необходимо определить не только решение, но и первую производную от решения задачи). Мы оцениваем решение с помощью алгоритмов "блуждания по сферам" и (или) "блуждания по границам" методов Монте–Карло. Первую и вторую производную от решения также оцениваем методами Монте–Карло.

В третьем разделе рассматривается также вопрос применимости алгоритмов методов Монте–Карло для решения граничных интегральных уравнений, полученных из начально–краевых задач для полных уравнений Навье–

Стокса. [8]. Оказалось, что векторный алгоритм методов Монте–Карло применим только для решения граничных интегральных уравнений для линеаризованных стационарных задач, так как в этом случае подбирая контур границы (в сущности задавая область, то есть для определенных областей) можно сделать так, что спектральные радиусы интегральных операторов будут меньше единицы. Теперь можно применить векторный алгоритм [44] методов Монте–Карло. Отметим, что в этом случае почти все оценки решения исходного интегрального уравнения связаны с оценками решения сопряженного интегрального уравнения и наоборот. Этот факт существенно повышает эффективность численных алгоритмов методов Монте–Карло. В этом разделе рассматриваются линеаризованные уравнения Навье–Стокса. Они дискретизируются только по временной переменной методом дробных шагов, и используя функцию Грина для оператора $\Delta - c$ для шара получаем систему интегральных уравнений. Доказывается, что к полученной системе интегральных уравнений можно применить векторный алгоритм методов Монте–Карло [44], и ее можно решить "блужданием по шарам".

В четвертом разделе рассматриваются вопросы построения алгоритмов методов Монте–Карло и применения некоторых алгоритмов методов Монте–Карло для оценивания решений разностных уравнений Навье–Стокса: 1. Возмущенные уравнения Навье–Стокса. 2. Полные уравнения Навье–Стокса. [6], [7].

Объектом исследования пятого раздела являются задачи фильтрации. Подробно рассматриваются в монографии [9] математические вопросы задач фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей (модель Маскета–Леверетта), а в монографии [10] исследованы задачи релаксационной фильтрации. Объектом применения алгоритмов методов Монте–Карло в пятом разделе данной диссертационной работы являются задачи фильтрации, приведенные в этих монографиях.

В пятом разделе рассматриваются также вопросы постановки задач фильтрации: начально–краевая задача фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пористой среде в изотермическом случае (модель Маскета–Леверетта), начально–краевая задача для системы уравнений линейной релаксационной фильтрации, которая описывается законом сохранения импульса сил сопротивления, линеаризованным законом сохранения массы жидкости, определяющими соотношениями для импульса сил сопротивления и массы жидкости. Последняя модель описывает процесс фильтрации

однофазной слабо сжимаемой жидкости в однородных, изотропных коллекторах с учетом релаксационных явлений.

В пятом же разделе моделируются случайные процессы для решения задач стационарной "равновесной" фильтрации, которая описывается моделью классического упругого режима (модель Маскета–Леверетта, [9]), и, задач релаксационной "неравновесной" фильтрации, когда учитываются обмен перетоком жидкости в трещиновато – пористых и слоистых средах, многофазный обмен при фильтрации неоднородных дисперсных сред различной природы, упруговязкое свойство (реология) жидкости и насыщенного порового коллектора (модель релаксационной "неравновесной" фильтрации [10]).

Рассматривается некоторая упрощенная модель Маскета – Леверетта. Полагается, что суммарная скорость фильтрации не зависит от насыщенности. В этом случае коэффициенты: $K = k(s) \cdot K_0$ и $\vec{f}(x, s)$, где $k(s) = k_{01}(s) + k_{02}(s)$, k_{0i} – коэффициенты фазовой проницаемости, K_0 – коэффициент фильтрации пористой среды для однородной жидкости (или симметричный тензор для анизотропной среды),

$$\vec{f}(x, s) = K(s) \int_s^1 \nabla_x \frac{\partial p_c}{\partial s} \frac{k_{02}(s)}{k(s)} d\xi + K_2(s) \nabla p_c(x, s) + K_2(s) (\rho_2 - \rho_1) g,$$

здесь $K_i(s) = K_0 k_{0i}(s)$ – симметричный тензор фазовой проницаемости, $p_c(x, s)$ – капиллярное давление, ρ_i – плотность жидкости (величина постоянная), g – сила тяжести, не зависят от s . Это предположение существенно упрощает задачу, так как система уравнений для определения суммарной скорости фильтрации и насыщенности распадается и можно их определить последовательно.

В этом разделе давление жидкости и насыщенность, а также их производные первого и второго порядка оцениваются методами Монте–Карло. Алгоритмы методов Монте–Карло для оценки решения и производных от решения основаны на построении цепей Маркова – "блуждания по сферам". "Блужданиями по сферам" оцениваются решения (давление, насыщенность и суммарная скорость фильтрации) и производные от решения стационарной задачи и регулярной задачи. Оценки решения нестационарной задачи строятся двумя способами – "блужданиями по сферам" и "блужданиями по границам". Оценки построенные "блужданиями по сферам" легко реализуемы на ЭВМ, а для оценок построенных "блужданиями по границам" легко установить, с помощью теории мартингалов, ε –смещенность оценок и ограниченность дисперсии.

В работе [9] рассматриваются два приближенных метода решения регулярной и вырождающейся задачи. В этом разделе эти методы были реализованы алгоритмом "блуждания по границам". Построены несмещенные оценки решения и показана ограниченность дисперсии. Алгоритмы моделирования цепи Маркова ("блуждания по границам") основаны на методе отбора фон Неймана.

Модель релаксационной "неравновесной" фильтрации состоит из замкнутой системы из четырех уравнений, состоящей из закона сохранения импульса, линеаризованного закона сохранения массы жидкости, определяющего соотношения для импульса сил сопротивления и массы жидкости. В подземной гидромеханике принято рассматривать только давление и скорость фильтрации, поэтому исключив из системы другие две величины получают систему из двух уравнений относительно величин: p – давления и \vec{w} – вектора скорости фильтрации. В этом разделе рассматриваются две модели: 1. Модель классического упругого режима фильтрации, которой соответствует ядра релаксации

$$F(t) = \frac{\mu}{k} \cdot t \cdot \eta(t), \quad \Phi(t) = \rho_0 \cdot \beta \cdot \eta(t).$$

2. Простейшая модель фильтрации с постоянной скоростью распространения возмущений, которой соответствует ядра релаксации

$$F(t) = \frac{\mu}{k} \cdot (t + \tau) \cdot \eta(t), \quad \Phi(t) = \rho_0 \cdot \beta \cdot \eta(t).$$

Ставятся начально–краевые задачи для этих двух моделей. Дискретизируя только по временной переменной, используя чисто неявную схему, получаем задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца относительно давления для обеих начально–краевых задач. Ее решение и первая производная от решения оценивается с помощью алгоритма "блуждания по сферам". Зная первую производную от давления можно определить скорость фильтрации. Математическая постановка начально–краевой задачи фильтрации несмешивающихся несжимаемых жидкостей (модель Маскета–Леверетта) заимствована из [9], а начально–краевая задача для релаксационной фильтрации из – [10].

Основные результаты третьего раздела опубликованы в работах автора: [112], [116], [117], [118], [119], [120],[121], [122], [123], [124], [127], [130],[136].

Основные результаты четвертого раздела опубликованы в работах автора: [110], [111], [112], [113], [114], [115], [136].

Основные результаты пятого раздела опубликованы в работах автора:

[125], [126], [128], [129], [131], [132], [133], [134], [135], [136], [137], [138], [139],
[140],[141].

1

Некоторые факты и сведения из теории вероятностей и математической статистики

1.1 Определения и факты из теории вероятностей

Основой методов Монте–Карло является теория вероятностей и математическая статистика. По этой причине мы ниже будем приводить некоторые определения и факты из теории вероятностей и математической статистики, имеющий общий характер и некоторые другие факты, связанные с приложениями.

Определение вероятностного пространства.

σ – **алгебра событий**. В тех случайных экспериментах, в которых алгебра событий содержит бесконечное множество событий, приходится рассматривать и бесконечные последовательности событий, и операции над ними. Простейшими среди этих операций являются объединение и пересечение бесконечной последовательности событий.

Определение 1.1 Если алгебра событий такова, что с каждой бесконечной последовательностью событий A_k содержит и события $\bigcap_k A_k$, $\bigcup_k A_k$, то такая алгебра называется σ -алгеброй.

Событие $\bigcap_k A_k$ состоит в том, что происходят все события A_k одновременно, а событие $\bigcup_k A_k$ – в том, что из последовательности событий A_k происходит по крайней мере одно.

Определение 1.2 Последовательность A_k называется монотонно убывающей, если $A_k \supset A_{k-1}$ для всех k , монотонно возрастающей, если $A_k \subset A_{k+1}$.

Событие $\bigcap_k A_k$ называется пределом убывающей последовательности, а событие $\bigcup_k A_k$ – пределом возрастающей последовательности событий.

Предел монотонной последовательности A_k обозначим $\lim A_k$.

Алгебра событий U будет σ -алгеброй, если со всякой монотонной последовательностью она содержит и ее предел. При построении σ -алгебр множеств широко используется операция σ – замыкания алгебры множеств. σ – замыканием алгебры U_0 называется наименьшая σ -алгебра U , содержащая U_0 ; она обозначается $\sigma(U_0)$. Ее еще называют σ -алгеброй, порожденной алгеброй U_0 .

Класс множеств μ называется монотонным, если с каждой монотонной последовательностью множеств он содержит и ее предел.

Теорема 1.3 $\sigma(U_0)$ совпадает с наименьшим монотонным классом, содержащим U_0 .

Если вероятность определена на σ -алгебре, то предполагается, что она удовлетворяет аксиоме – расширенной аксиоме сложения:

Аксиома 1.4 Если A_k – последовательность попарно несовместимых событий, то

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k).$$

Эта аксиома эквивалентна следующей аксиоме непрерывности.

Аксиома 1.5 Для всякой монотонной последовательности A_k

$$P(\lim A_k) = \lim P(A_k).$$

Вероятностным пространством (полем вероятностей) Ω, U, P называется совокупность трех объектов – пространства элементарных событий Ω , σ -алгебры U подмножеств пространства Ω – σ -алгебры событий, вероятностной меры $P(A)$, определенной для $A \in U$, для которой $P(\Omega) = 1$.

Определение 1.6 Мерой на σ -алгебре подмножеств U называется неотрицательная счетно-аддитивная функция $P(A)$ множества, то есть такая функция, для которой

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

для всякой последовательности попарно не пересекающихся множеств A_k из U . Если $P(\Omega) = 1$, то мера называется нормированной.

Измеримым пространством $\{\Omega, U\}$ называется пара объектов – некоторое множество Ω и некоторая σ -алгебра его подмножеств U . Таким образом, **вероятностное пространство – это измеримое пространство с нормированной мерой на нем.**

Если Ω содержит не более счетного числа элементов и U есть множество всех подмножеств Ω , то вероятность полностью определяется своими

значениями на элементарных событиях. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, $P(\{\omega_k\}) = p_k$, $\{\omega_k\}$ – одноточечное множество, содержащее ω_k . Тогда

$$P(A) = \sum_k p_k \chi_A(\omega_k),$$

где $\chi_A(\omega) = 1$ при $\omega \in A$, $\chi_A(\omega) = 0$ при $\omega \notin A$. Функция $\chi_A(\omega)$ называется индикатором события A . Вероятностные пространства описанного вида называются дискретными.

Рассмотрим вероятностное пространство, для которого Ω совпадает с m -мерным евклидовым пространством R^m . Такое пространство исходов естественно рассматривать в тех экспериментах, в которых наблюдаются значения m вещественных величин. Будем обозначать координаты точки $\vec{x} \in R^m$ через (x^1, x^2, \dots, x^m) . В качестве U возьмем σ -алгебру, содержащую множества точек вида

$$\{\vec{x} : a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m\} \quad (1.1)$$

где $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$ – вещественные числа. Такие множества называются полуоткрытыми справа параллелепипедами. Конечные суммы полуоткрытых справа параллелепипедов образуют алгебру U_0 в R^m . Наименьшая σ -алгебра U , совпадает с наименьшей σ -алгеброй множеств, содержащих все открытые и замкнутые множества из R^m . Эта σ -алгебра называется борелевской σ -алгеброй, а множества из U – борелевскими.

Всякое множество из U получается с помощью операции предельного перехода, примененного не более счетного числа раз к множествам из U_0 . Поэтому для задания вероятности на U (учитывая аксиому непрерывности) достаточно задать ее на U_0 . Поскольку множества из U_0 представимы в виде суммы попарно непересекающихся полуоткрытых параллелепипедов, то достаточно определить меру на множествах вида (1.1).

Функции распределения. Пусть

$$G(b_1, \dots, b_m) = P(\{\vec{x} : -\infty < x^1 < b_1, \dots, -\infty < x^m < b_m\}). \quad (1.2)$$

Обозначим через $\Delta_{[a,b]}^{(k)} G(x^1, \dots, x^m) = G(x^1, \dots, x^{k-1}, b, x^{k+1}, \dots, x^m) - G(x^1, \dots, x^{k-1}, a, x^{k+1}, \dots, x^m)$ приращение функции $G(x^1, \dots, x^m)$ по k -му аргументу на полуинтервале $[a, b)$. тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} P(\{\vec{x} : a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m\}) &= \\ &= \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_m, b_m]}^{(m)} G(x^1, \dots, x^m). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, всякая мера на измеримом пространстве $\{R^m, U\}$ однозначно определяется функцией $G(x^1, \dots, x^m)$ вида (1.2). Чтобы соответствующая мера была нормированной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$1) \lim_{x^1 \rightarrow \infty, \dots, x^m \rightarrow \infty} G(x^1, \dots, x^m) = 1$$

Укажем еще некоторые условия, которым необходимо удовлетворяет G . Из аксиомы непрерывности следует, что

$$2) \lim_{x^k \rightarrow -\infty} G(x^1, \dots, x^m) = 0 \text{ для всех } k = 1, \dots, m$$

3) $\lim_{x^1 \uparrow b_1, \dots, x^m \uparrow b_m} G(x^1, \dots, x^m) = G(b_1, \dots, b_m)$, каковы бы ни были b_1, \dots, b_m , т.е. функция $G(x^1, \dots, x^m)$ непрерывна по совокупности аргументов слева.

Из (1.3) следует

$$4) \Delta_{[a_1, b_2]}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_m, b_m]}^{(m)} G(x^1, \dots, x^m) \geq 0.$$

Определение 1.7 *Функция $G(x^1, \dots, x^m)$, удовлетворяющая условиям*

1) – 4), называется m -мерной функцией распределения.

Определение 1.8 *Одномерной функцией распределения ($m = 1$) называется*

неубывающая непрерывная слева функция $F(x)$, определенная на R и удовлетворяющая условиям

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Всякой m -мерной функции распределения отвечает единственная вероятностная мера на $\{R^m, U\}$.

1.1.1 Случайные величины

Определение случайной величины. Случайные величины – это величины, измеряемые в случайных экспериментах. Случайная величина полностью определена, если известен исход эксперимента ω . Таким образом случайная величина ξ на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$, описывающем данный случайный эксперимент, есть некоторая функция элементарного события $\xi(\omega)$. Тот факт, что мы можем измерять эту величину в нашем эксперименте, означает, что возможно наблюдать событие: значение величины ξ принадлежит данному интервалу Δ , каков бы ни был этот интервал. Значит

$$\{\omega : \xi(\omega) \in \Delta\} \in U \quad (1.4)$$

Функции $\xi(\omega)$, удовлетворяющие для всех интервалов Δ условию (1.4), называются *измеримыми относительно σ -алгебры U или U -измеримыми*. Для измеримой относительно U функции $\xi(\omega)$ соотношение (1.4) выполнено для всякого борелевского множества $\Delta \subset R$.

Определение 1.9 *Случайной величиной на вероятностном пространстве*

$\{\Omega, U, P\}$ *называется всякая U -измеримая функция $\xi(\omega)$, определенная на Ω .*

Случайные величины часто обозначают ξ вместо $\xi(\omega)$, не указывая на зависимость от элементарного события.

Простейшим примером случайной величины является величина $\chi_A(\omega)$ – индикатор события A : $\chi_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$; $\chi_A(\omega) = 0$, если $\omega \notin A$.

Другим примером случайной величины служит дискретная случайная величина, принимающая не более чем счетное множество различных значений $\{x_1, x_2, \dots\}$. Очевидно, что события $\{\xi(\omega) = x_i\} = A_i$ попарно несовместимы и $\bigcup_i A_i = \Omega$. Пусть $P(A_i) = P\{\xi(\omega) = x_i\} = P\{\xi = x_i\} = p_i$.

Определение 1.10 *Набор вероятностей $\{p_i\}$ и чисел $\{x_i\}$ называется*

распределением дискретной величины ξ . Оно определяет вероятность попадания величины ξ в любое множество Λ на прямой:

$$P\{\xi \in \Lambda\} = \sum_{x_i \in \Lambda} p_i.$$

Распределение случайной величины.

Определение 1.11 *Распределением произвольной (случайной) величины ξ называется мера*

$$P_\xi(A) = P(\{\omega : \xi(\omega) \in A\}), \quad (1.5)$$

заданная на σ -алгебре борелевских множеств из R .

Из (1.4) следует, что для всех борелевских множеств $\{\omega : \xi(\omega) \in \Lambda\} \in U$, и поэтому правая часть (1.5) определена. Для задания распределения величины ξ достаточно задать функцию

Определение 1.12

$$F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x)) = P\{\xi < x\},$$

которая называется функцией распределения величины ξ и является одномерной функцией распределения.

Если ξ – дискретная величина, для которой $P\{\xi = x_i\} = p_i$, то

$$F_\xi(x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_i p_i \varepsilon(x - x_i),$$

где $\varepsilon(x) = 1$, если $x > 0$; $\varepsilon(x) = 0$, если $x \leq 0$. Обозначим через $F_\xi(x+0)$ предел справа $F_\xi(x)$ в точке x . Величина скачка функции распределения $F_\xi(x+0) - F_\xi(x)$ совпадает с вероятностью $P\{\xi = x\}$; если $P\{\xi = x\} > 0$, то x называют *атомом* распределения случайной величины ξ . Говорят, что ξ имеет непрерывное распределение, если $F_\xi(x)$ – непрерывная функция. В этом случае любое фиксированное значение ξ может принимать лишь с вероятностью 0. Величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует такая функция $f_\xi(x)$, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt \quad (1.6)$$

Определение 1.13 Функция $f_\xi(x)$, удовлетворяющая соотношению (1.6),

называется *плотностью распределения величины ξ* . Если ξ имеет плотность распределения, то ее распределение выражается формулой

$$P_\xi(\Lambda) = \int_{\Lambda} f_\xi(t) dt \quad (1.7)$$

(интеграл (1.7) понимается как интеграл Лебега). В частности,

$$P_\xi((a, b)) = \int_a^b f_\xi(t) dt = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Плотность распределения удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $f_\xi(t) \geq 0$ для почти всех t ;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t) dt = 1$.

Любая измеримая по Лебегу функция $f_\xi(t)$, удовлетворяющая этим двум условиям, может выступать в качестве плотности некоторой случайной величины.

Группа случайных величин. Совместное распределение случайных величин.

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, U, P) заданы m случайных

величин $\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)$. Тогда для всех $a_1 < b_1, \dots, a_m < b_m$

$$\begin{aligned} \{\omega : a_1 \leq \xi_1(\omega) < b_1, \dots, a_m \leq \xi_m(\omega) < b_m\} = \\ = \bigcap_{k=1}^m \{\omega : a_k \leq \xi_k(\omega) < b_k\} \in U \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначим через $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega))$ точку в R^m , а через Λ полуоткрытый параллелепипед

$$\Lambda = \{\vec{x} : a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m\}.$$

Соотношение (1.8) для произвольного борелевского множества Λ из R^m можно переписать так:

$$\{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in \Lambda\} \in U. \quad (1.9)$$

Определение 1.14 Мера $\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}$, определенная на борелевских множествах соотношением

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = P(\{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in B\}), \quad (1.10)$$

называется совместным распределением случайных величин ξ_1, \dots, ξ_m или распределением случайного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega))$ в R^m .

Для определения меры $\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}$ достаточно задать функцию распределения.

Определение 1.15

$$\begin{aligned} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) &= P(\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_m(\omega) < x_m\}) \\ &= P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_m < x_m\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

называется совместной функцией распределения величин ξ_1, \dots, ξ_m .

Эта функция является m -мерной функцией распределения и, следовательно удовлетворяет условиям 1) – 4). Зная совместную функцию распределения величин ξ_1, \dots, ξ_m , можно определить и совместную функцию распределения величин $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$, где $0 < i_1 < \dots < i_k \leq m$:

$$F_{\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) \Big|_{j \neq i_1, \dots, i_k}^{x_j = +\infty} \quad (1.12)$$

(под $F(+\infty)$ понимается $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$). Соотношение (1.12) следует непосредственно из (1.11), если только $\xi_j < +\infty$ – достоверное событие. Совместные функции распределения подмножества случайных величин, получаемые из функции распределения всех величин, называются маргинальными (частными) функциями распределения (формула (1.12) определяет k -мерные маргинальные распределения). В частности, зная F_{ξ_1, \dots, ξ_m} , определяем и функции распределения величин ξ_k :

$$F_{\xi_k}(x) = F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(+\infty, \dots, +\infty, x, +\infty, \dots, +\infty)$$

Дискретные и непрерывные распределения.

Если каждая из величин ξ_k имеет дискретное распределение, то говорят, что случайный вектор (ξ_1, \dots, ξ_m) также имеет дискретное распределение (или что совместное распределение величин ξ_1, \dots, ξ_m дискретно). Пусть ξ_k принимает значения $\{y_1^k, y_2^k, \dots\}$. Тогда совместное распределение величин ξ_1, \dots, ξ_m определяется вероятностями

$$p_{i_1, \dots, i_m} = P\{\xi_1 = y_{i_1}^1, \xi_2 = y_{i_2}^2, \dots, \xi_m = y_{i_m}^m\}.$$

Мера, задающая совместное распределение ξ_1, \dots, ξ_m , задается в этом случае равенством

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = \sum p_{i_1, \dots, i_m} \chi_B(y_{i_1}^1, \dots, y_{i_m}^m),$$

где $\chi_B(y^1, \dots, y^m) = 1$, если $(y^1, \dots, y^m) \in B$; $\chi_B(y^1, \dots, y^m) = 0$, если $(y^1, \dots, y^m) \notin B$; (y^1, \dots, y^m) – точка в R^m . Совместная функция распределения задается формулой

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{y_{i_1}^1 < x_1, \dots, y_{i_m}^m < x_m} p_{i_1, \dots, i_m}.$$

Величины ξ_1, \dots, ξ_m имеют совместное абсолютно непрерывное распределение, если существует такая измеримая по Лебегу функция $f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$, что совместное распределение величин ξ_1, \dots, ξ_m определяется формулой

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = \int_B \dots \int_B f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$$

(справа записан m -кратный интеграл Лебега). Тогда функция $f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$ называется совместной плотностью распределения величин ξ_1, \dots, ξ_m . Совместная функция распределения выражается через совместную плотность по формуле

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(y_1, \dots, y_m) dy_1 \cdots dy_m.$$

Отсюда следует формула для плотности:

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \cdots \partial x_m} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m).$$

Отметим, что существование производной, стоящей в правой части последнего равенства, для почти всех x_1, \dots, x_m еще не обеспечивает существования плотности. Чтобы последняя существовала, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x_1 \cdots \partial x_m} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m = 1.$$

Свойства совместной плотности:

а) $f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) \geq 0$ для почти всех x_1, \dots, x_m ;

б) $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m = 1$

Всякая измеримая по Лебегу функция $g(x_1, \dots, x_m)$, удовлетворяющая этим двум условиям, может выступать в качестве совместной плотности некоторых m случайных величин и называется m -мерной плотностью.

Проинтегрировав плотность по аргументам x_j , $j \neq i_1, \dots, i_k$, от $-\infty$ до $+\infty$, получим совместную плотность распределения величин $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$. В частности,

$$f_{\xi_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_m.$$

Пример. Случайный вектор (ξ_1, \dots, ξ_m) равномерно распределен в ограниченном измеримом множестве $G \in R^m$, если совместная плотность

величин ξ_1, \dots, ξ_m имеет вид

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \frac{1}{\text{mes } G}, & (x_1, \dots, x_m) \in G; \\ 0, & (x_1, \dots, x_m) \notin G, \end{cases}$$

где $\text{mes } G$ – лебегова мера в R^m .

Математическое ожидание дискретной величины.

Пусть в случайном эксперименте наблюдается некоторая случайная величина ξ , которая может принимать конечное число значений a_1, \dots, a_N с вероятностями p_1, \dots, p_N . Если x_1, \dots, x_n – наблюдения нашей величины в n последовательных осуществлениях эксперимента, то среднее значение реализаций можно представить в виде

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sum_{k=1}^N a_k \nu_n(A_k),$$

где A_k – события $\{\xi = a_k\}$, ν_n – частота события. Заменяя частоты на вероятности, получим выражение

$$M\xi = \sum_{k=1}^N a_k p_k,$$

которое называется средним или математическим ожиданием случайной величины ξ .

Если ξ – произвольная дискретная случайная величина, принимающая значения $a_k (k = 1, 2, \dots)$ с вероятностями p_k , то $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k$, если только ряд справа сходится абсолютно. Некоторые свойства математического ожидания дискретной величины.

- 1) $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$;
- 2) $M(\lambda\xi) = \lambda \cdot M\xi$ для всех λ ;
- 3) если $P\{\xi_1 = \xi_2\} = 1$, то $M\xi_1 = M\xi_2$;
- 4) если $\xi \geq 0$, то $M\xi \geq 0$;
- 5) если $P\{\xi = c\} = 1$, то $M\xi = c$.

Математическое ожидание произвольной величины.

Для определения математического ожидания произвольной случайной величины ξ введем последовательность дискретных случайных величин ξ_n , определяемых равенством $\xi_n = k/n$, если $k/n \leq \xi < (k+1)/n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, что $|\xi_n - \xi| \leq 1/n$. Если $M\xi_m$ существует при некотором n , то оно существует для всех n и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} P\left\{\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}\right\}.$$

Этот предел называется математическим ожиданием величины ξ и обозначается $M\xi$. Таким образом определенное математическое ожидание также удовлетворяет свойствам 1) – 5). Если ξ – неотрицательная случайная величина, то считаем $M\xi$ всегда определенным и равным $+\infty$ в том случае, когда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P\left\{\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}\right\}$$

расходится.

Если $F_\xi(x)$ – функция распределения величины ξ , то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) \quad \text{при} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_\xi(x) < \infty$$

(интегралы справа являются интегралами Стильтьеса и вычисляются как пределы интегральных сумм). Если существует плотность $f_\xi(x)$ величины ξ , то $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$ при $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$. Если величина $\xi = \xi(\omega)$ задана на вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$, то ее математическое ожидание может быть вычислено с помощью интеграла Лебега по мере P :

$$M\xi(\omega) = \int \xi(\omega) P(d\omega),$$

при условии, что интеграл справа существует.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_m – случайные величины, $F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$ – их совместная функция распределения, $g(x_1, \dots, x_m)$ – некоторая борелевская функция. Тогда

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_m) = \int \dots \int g(x_1, \dots, x_m) dF_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m),$$

если только интеграл справа абсолютно сходится (он понимается как m -кратный интеграл Лебега–Стилтьеса); если g – непрерывная функция, то его можно вычислять как интеграл Римана–Стилтьеса. В том случае, когда существует совместная плотность величин ξ_1, \dots, ξ_m , предыдущая формула принимает вид

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_m) = \int \dots \int g(x_1, \dots, x_m) f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m,$$

если только m -кратный интеграл Лебега в правой части абсолютно сходится.

Моменты случайных величин.

Величина

$$M\xi^k = \int x^k dF_\xi(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

называется k -м моментом величины ξ (если указанное математическое ожидание существует); k -й момент величины $(\xi - M\xi)$ называется k -м центральным моментом. Он вычисляется по формуле

$$M(\xi - M\xi)^k = \int (x - M\xi)^k dF_\xi(x).$$

k -й момент случайной величины $|\xi|$ называется абсолютным k -м моментом величины ξ .

Особую роль играет второй центральный момент, который называется дисперсией величины и обозначается $D\xi$:

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \\ &= \int (x - M\xi)^2 dF_\xi(x) = \int x^2 dF_\xi(x) - \left(\int x dF_\xi(x) \right)^2. \end{aligned}$$

Для абсолютно непрерывных величин дисперсия вычисляется по формуле

$$D\xi = \int (x - M\xi)^2 f_\xi(x) dx = \int x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int x f_\xi(x) dx \right)^2.$$

Для дискретной величины ξ , принимающей значения a_k с вероятностями p_k ,

$$D\xi = \sum_k a_k^2 p_k - \left(\sum_k a_k p_k \right)^2.$$

Заметим, что $D\xi$ всегда определена, если определено $M\xi$, но может принимать значения $+\infty$. Величина $\sigma = \sqrt{D\xi}$ называется среднеквадратическим

отклонением величины ξ . Отметим одно важное свойство величины $D\xi$: если $D\xi = 0$, то $P\{\xi = M\xi\} = 1$, т.е. в этом случае величина ξ с вероятностью 1 постоянна.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_m - случайные величины с совместной функцией распределения $F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$. Величины

$$\begin{aligned} m_{\xi_1, \dots, \xi_m}(k_1, \dots, k_m) &= \int \dots \int x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} dF_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \\ &= M\xi_1^{k_1} \dots \xi_m^{k_m}, \end{aligned}$$

где $k_1, \dots, k_m \geq 0, k_1 + \dots + k_m = k$, называются смешанными моментами величин ξ_1, \dots, ξ_m порядка k .

Условное распределение случайной величины.

Рассмотрим некоторую величину ξ .

Определение 1.16 *Выражение*

$$F_\xi(x|A) = \frac{P(\{\xi < x\} \cap A)}{P(A)}$$

называется *условной функцией распределения величины ξ относительно события A* .

Она определена, если $P(A) > 0$.

Определение 1.17 *Если $F_\xi(x|A)$ абсолютно непрерывна и*

$$F_\xi(x|A) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t|A) dt,$$

то $f_\xi(x|A)$ называется *условной плотностью распределения величины относительно события A* .

Как условная функция распределения, так и условная плотность распределения обладают свойствами функции распределения и плотности распределения

соответственно. Моменты, вычисленные по условной функции распределения, называются условными моментами величины. В частности, выражение

$$M(\xi|A) = \int x dF_\xi(x|A),$$

если интеграл справа сходится абсолютно, называется условным математическим ожиданием величины ξ относительно события A . Если ξ задана на вероятностном пространстве (Ω, U, P) , то для условного математического ожидания можно привести другое выражение:

$$M(\xi|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A \xi(\omega) P(d\omega).$$

Пусть E_1, \dots, E_n – полная группа событий, $P(E_i) > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Справедлива следующая формула полного математического ожидания:

$$M\xi = \sum_{k=1}^n M(\xi|E_k)P(E_k).$$

Можно привести и некоторое обобщение этой формулы. Если C имеет вид $C = \bigcup E_{i_k}$, то

$$\int_C \xi(\omega) P(d\omega) = \sum_{E_k \subset C} M(\xi|E_k)P(E_k) \quad (1.13)$$

Предположим, что событие A заключается в том, что $\{a \leq \xi < b\}$. Тогда условная функция распределения

$$F_\xi(x|a \leq \xi, b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{F_\xi(x) - F_\xi(a)}{F_\xi(b) - F_\xi(a)}, & a \leq x < b \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

есть распределение урезанной величины ξ или урезанное распределение. Запишем математическое ожидание и дисперсию для урезанного распределения:

$$M(\xi|\{a \leq \xi < b\}) = \frac{1}{F_\xi(b) - F_\xi(a)} \int_a^b x dF_\xi(x),$$

$$D(\xi|\{a \leq \xi < b\}) = \frac{1}{F_\xi(b) - F_\xi(a)} \int_a^b x^2 dF_\xi(x) - \left(\frac{1}{F_\xi(b) - F_\xi(a)} \int_a^b x dF_\xi(x) \right)^2.$$

Закон больших чисел. Некоторые предельные теоремы для схемы Бернулли.

Обозначим через ν_n число появлений события A в серии из n независимых испытаний. Пусть p – вероятность появления события A в одном испытании. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\nu_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right\} = 0 \quad (1.14)$$

Определение 1.18 *Говорят, что последовательность случайных величин*

$\{\xi_n, n \geq 1\}$ *сходится по вероятности к случайной величине ξ , если для каждого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Таким образом, предыдущее утверждение означает, что частота ν_n/n появления события A в серии из n испытаний сходится по вероятности к вероятности p появления события A в одном испытании. Вообще, законом больших чисел называют теоремы, дающие условия, при которых

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \rightarrow 0$$

по вероятности. Если в приведенной выше схеме Бернулли $\nu_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где ξ_i – случайная величина, равная 1, если в i -м испытании событие A произошло, и равная 0 в противном случае. Тогда

$$\frac{\nu_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k.$$

Ниже приведем более общую задачу. Пусть заданы последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ и числовая последовательность $\{\beta_n, n = 1, 2, \dots\}$ такая, что $\beta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. При каких условиях существует такая числовая последовательность $\{\alpha_n, 1, 2, \dots\}$, что при $n \rightarrow \infty$ $\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \beta_k - \alpha_n \rightarrow 0$ по вероятности? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1.19 . Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ – последовательность независимых случайных величин $F_n(x) = P\{\xi_n < x\}$. Обозначим через m_n медиану случайной величины ξ_n , то есть любое из чисел, удовлетворяющих неравенствам $P\{\xi_n \geq m_n\} \geq 1/2$ и $P\{\xi_n \leq m_n\} \geq 1/2$. Для того чтобы существовала последовательность постоянных $\{\alpha_n, n \geq 1\}$ такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n \rightarrow 0$$

по вероятности, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - m_k)^2}{\beta_k^2 + (x - m_k)^2} dF_k(x) \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

Если это условие выполнено, то

$$\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \left(m_k + \int_{|x-m_k| < \tau \beta_n} (x - m_k) dF_k(x) \right) + o(1)$$

где τ – произвольная положительная постоянная.

Простое условие применимости закона больших чисел содержится в следующих теоремах.

Теорема 1.20 Если последовательность независимых случайных величин

$\{\xi_n, n \geq 1\}$ такова, что $D\xi_n$ существует и $\frac{D\xi_n}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \rightarrow 0$$

по вероятности.

Определение 1.21 Если величины $\xi_n (n = 1, 2, \dots)$ имеют одну и ту

же функцию распределения $F(x) = P\{\xi_n < x\}$, то они называются

одинаково распределенными.

Теорема 1.22 Если $\{\xi_n, n \geq 1\}$ – последовательность независимых

одинаково распределенных величин и если существует математическое

ожидание $M\xi_n = a$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow a$$

по вероятности.

Неравенство Чебышева.

Пусть ξ – произвольная случайная величина и $g(x)$ – неотрицательная четная и неубывающая на $[0, +\infty)$ функция. Тогда для всех $a \geq 0$

$$\frac{Mg(\xi) - g(a)}{\text{п.н. sup } g(\xi)} \leq P\{|\xi| \geq a\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(a)}. \quad (1.16)$$

Величина, стоящая в знаменателе левой части неравенства, называется почти наверное верхней гранью случайной величины $g(\xi)$ и определяется так:

$$\text{п.н. sup } g(\xi) = \inf\{C : C \geq 0 \text{ и } P\{g(\xi) > C\} = 0\}.$$

Полагая в неравенстве (1.16) $g(x) = |x|^r$ ($r > 0$), получаем

$$\frac{M|\xi|^r - a^r}{\text{п.н. sup } |\xi|^r} \geq P\{|\xi| \geq a\} \leq \frac{M|\xi|^r}{a^r}. \quad (1.17)$$

Применив это неравенство к величине $\xi - M\xi$, получим

$$\frac{M|\xi - M\xi|^r}{\text{п.н. sup } |\xi - M\xi|^r} \leq P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{M|\xi - M\xi|^r}{a^r}. \quad (1.18)$$

При $r = 2$ отсюда следует *неравенство Чебышева*:

$$P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{D\xi}{a^2}. \quad (1.19)$$

Центральная предельная теорема.

Термин центральная предельная теорема в теории вероятностей означает любое утверждение о том, что при выполнении определенных условий функция распределения суммы индивидуально малых случайных величин с ростом числа слагаемых сходится к нормальной функции распределения. Исключительная важность центральной предельной теоремы объясняется тем, что она дает теоретическое объяснение следующему, многократно подтвержденному практикой наблюдению: если исход случайного эксперимента определяется большим числом случайных факторов, влияние каждого из которых пренебрежимо мало, то такой эксперимент хорошо аппроксимируется нормальным распределением с соответствующим образом подобранными математическим ожиданием и дисперсией.

Центральная предельная теорема для последовательностей независимых случайных величин.

Центральная предельная теорема при наличии конечных дисперсий. Пусть $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – последовательность взаимно независимых случайных величин с функциями распределения $G_k(x) = P\{\xi_k < x\}$, имеющих конечные математические ожидания $M\xi_k = a_k$ и дисперсии $D\xi_k = \sigma_k^2$, причем $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 > 0$ для $n \geq 1$.

Нормированной суммой случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называется случайная величина

$$\eta_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k),$$

которая характеризуется тем, что $M\eta_n = 0$, $D\eta_n = 1$ для любого $n \geq 1$.

Пусть $F_n(x)$ – функция распределения нормированной суммы η_n и $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$ – нормальная (0,1) функция распределения. При наличии конечных дисперсий центральная предельная теорема устанавливает условия, при которых имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) \quad (1.20)$$

равномерно относительно $x \in (-\infty, \infty)$.

Одна из наиболее простых и в то же время наиболее часто применяемых форм центральной предельной теоремы связана с последовательностью одинаково распределенных случайных величин.

Теорема 1.23 (*Леви–Линдберга*) Если $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, то для функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы $\eta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum \xi_k - na \right)$ имеет место соотношение (1.20), $a = M\xi_k$, $\sigma^2 = D\xi_k$.

1.1.2 Случайные процессы

Цепи Маркова.

Одним из наиболее важных обобщений понятия последовательности независимых случайных величин является понятие последовательности величин, связанных в цепь Маркова.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) . Измеримое отображение $\xi; (\Omega, F) \rightarrow (X, B)$, где (X, B) – некоторое измеримое пространство, называется *случайным элементом* в (X, B) .

Определение 1.24 Последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных элементов в измеримом пространстве (X, B) называется *цепью Маркова*,

если для любых $\Gamma \in B$ и $n = 1, 2, \dots$ с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_{n-1}\}$$

Пространство (X, B) называется *фазовым пространством* цепи.

Всякую последовательность (случайных и неслучайных) элементов $\{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$ пространства (X, B) можно рассматривать как движение некоторой системы (точки, частицы) в фазовом пространстве: из начального состояния ξ_0 в момент времени 1 система переходит в состояние ξ_1 , затем в момент времени 2 – в состояние ξ_2 и т.д. Понятие цепи Маркова, таким образом, выделяет из совокупности всевозможных движущихся систем так называемые *системы без последствия*, или *системы с отсутствием памяти*. В детерминированном случае это те системы, для которых состояние в момент времени n однозначно определяется состоянием этой системы в момент времени $n-1$ независимо от того, каким было движение до того момента. В отличие от детерминированных стохастические системы без последствия обладают тем свойством, что по состоянию системы в момент времени $n-1$ однозначно определяется не состояние системы в момент времени n , а лишь вероятность, с какой она в этот момент времени находится в том или ином множестве состояний.

Пример 1.25 Последовательность независимых случайных элементов

$\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ образуют цепь Маркова, так как

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma\}.$$

Пример 1.26 Случайные блуждания. Пусть X – аддитивная коммутативная

группа и B – некоторая σ -алгебра подмножеств X , согласованная с

операцией сложения в X , то есть если $\Gamma \in B$ то $\Gamma + x = \{x+z, z \in \Gamma\} \in$

B при любом $x \in X$. Предположим, что задана последовательность

независимых случайных элементов $\{\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ в (X, B) . Тогда последовательность $\{\xi_n = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ является цепью Маркова в фазовом пространстве (X, B) , так как для всех $\Gamma \in B$ и $n = 1, 2, \dots$

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_{n-1} + \eta_n \in \Gamma | \xi_{n-1}\}.$$

Такая цепь называется *случайным блужданием* в X .

Пример 1.27 *Случайные блуждания с границами.* Пусть X – коммутативная аддитивная группа, а B – σ -алгебра подмножеств X , согласованная с операцией сложения в X (см. Пример 1.26). Для произвольного множества $D \in B$ обозначим через B_D след σ -алгебры B на множестве D , т.е. σ -алгебру множества вида $\Gamma \cap D$, $\Gamma \in B$. Предположим, что для некоторого фиксированного множества $D \in B$ задано измеримое отображение $\varphi : (X \setminus D, B_{X \setminus D}) \rightarrow (D, B_D)$, а для некоторого подмножества $D' \subset D$, $D' \in B$, – измеримое отображение $\psi : (D', B_{D'}) \rightarrow (D, B_D)$. Пусть $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов в (X, B) , а η_0 – не зависящий от последовательности $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ случайный

элемент в (D, B_D) . Положим $\xi_0 = \eta_0$ и

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} = & \chi_{D'}(\xi_n)\psi(\xi_n) + \chi_{D \setminus D'}(\xi_n)[(\xi_n + \eta_{n+1})\chi_D(\xi_n + \eta_{n+1}) \\ & + \varphi(\xi_n + \eta_{n+1})\chi_{X \setminus D}(\xi_n + \eta_{n+1})], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $\chi_\Gamma(x)$ – индикатор множества $\Gamma \in X$. Тогда последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ образует цепь Маркова в (D, B_D) , называемую случайным блужданием с отражением.

Пример 1.28 Пусть X, B – аддитивная коммутативная группа с σ -алгеброй, такая же, как и в примере (1.26). По заданному множеству $D_0 \in B$ и последовательности $\{\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ независимых случайных элементов в (X, B) построим новую последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ по формуле $\xi_0 = \eta_0, \xi_{n+1} = \xi_n \cdot \chi_{D_0}(\xi_n) + (\xi_n + \eta_{n+1}) \cdot \chi_{X \setminus D_0}(\xi_n), n = 0, 1, 2, \dots$. Эта последовательность образует цепь Маркова в X, B . Она называется случайным блужданием с поглощением во множестве D_0 . При таком блуждании частица, оказавшаяся в момент времени n в некоторой точке $x \notin D_0$, в следующий момент времени смещается в точку $x + \eta_{n+1}$. Если же частица попала в какую-либо точку множества D_0 , то там и остается навсегда.

Критерий марковости. Пусть задана последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных элементов в измеримом пространстве (X, B)

(вероятностное пространство (Ω, F, P) считается фиксированным). Обозначим через F_n минимальную σ -алгебру событий, относительно которой измеримы случайные элементы $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, а через F^n – минимальную σ -алгебру событий, относительно которой измеримы случайные элементы ξ_n, ξ_{n+1}, \dots . Иначе говоря, F_n – σ -алгебра всех событий, связанных с эволюцией последовательности до момента n включительно, а F^n – σ -алгебра всех событий, связанных с эволюцией последовательности после момента n , включая сам момент времени n , σ -алгебра F_n порождается событиями вида $\{\xi_k \in \Gamma \text{ при всех } k = 0, 1, 2, \dots, n, \Gamma \in B$. Аналогично σ -алгебра F^n порождается событиями $\{\xi_k \in \Gamma \text{ при } k \geq n, \Gamma \in B$. Определение цепи Маркова означает, что для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\Gamma \in B$ с вероятностью 1

$$P\{\xi_{n+1} \in \Gamma | F_n\} = P\{\xi_{n+1} \in \Gamma | \xi_n\}.$$

Теорема 1.29 Пусть $(\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ – последовательность случайных элементов в измеримом пространстве X, B . Следующие утверждения эквивалентны:

последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$ является цепью Маркова;

1) для всех $n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, \Gamma \in B$ с вероятностью 1

$$P\{\xi_{n+m} \in \Gamma | F_n\} = P\{\xi_{n+m} \in \Gamma | \xi_n\};$$

2) для любых $A \in F_{n-1}, B \in F^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) с вероятностью 1

$$P\{A \cap B | \xi_n\} = P\{A | \xi_n\} P\{B | \xi_n\};$$

3) для любой ограниченной F^{n+1} измеримой случайной величины η с вероятностью 1

$$M\{\eta | F_n\} = M\{\eta | \xi_n\}.$$

Если считать момент времени n "настоящим" то тогда F_{n-1} – это "прошлое" а F^{n+1} – "будущее". Утверждение 3) означает, что для цепи Маркова при известном "настоящем" прошлое и "будущее" условно независимы.

Уравнение Колмогорова–Чепмена. Пусть $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ – цепь Маркова в фазовом пространстве (X, B) и $0 \leq k < m < n$. Тогда в силу свойств условных вероятностей и марковского свойства имеем с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\} = M\{P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_m\} | \xi_k\}.$$

Это соотношение называется уравнением Колмогорова–Чепмена и является фактически следствием формулы полной вероятности и марковского свойства.

Рассмотрим условную вероятность $P(\xi_n \in \Gamma | \xi_k)$ ($0 \leq k < n, \Gamma \in B$). При фиксированных k, n, Γ эта вероятность представляет собой B -измеримую функцию от ξ_k . Вообще говоря, нельзя утверждать, что при фиксированных k, n, ω функция $P(\xi_n \in \Gamma | \xi_k)$ является мерой на B .

В самом деле, из свойств условных вероятностей следует, что для каждой последовательности $\{\Gamma_r, r = 1, 2, \dots\}$ непересекающихся множеств из σ -алгебры B с вероятностью 1 выполнено

$$P\left\{\xi_n \in \bigcup_{r=1}^{\infty} \Gamma_r | \xi_k\right\} = \sum_{r=1}^{\infty} P\{\xi_n \in \Gamma_r | \xi_k\}.$$

При этом множество тех ω , для которых это равенство не имеет места, зависит от последовательности $\{\Gamma_r, r = 1, 2, \dots\}$. Для другой последовательности это исключительное множество будет другим, и поэтому нельзя утверждать, что для почти всех ω условная вероятность $P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\}$ является мерой на B . Тем не менее во многих случаях такое утверждение справедливо. Именно, если X – полное метрическое сепарабельное пространство, а B – σ -алгебра борелевских подмножеств X , то существует такая функция $P(k, x, n, \Gamma)$, $0 \leq k < n, x \in X, \Gamma \in B$, что при каждом k, n и Γ с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\} = P(k, \xi_k, n, \Gamma),$$

и при этом $P(k, n, x, \Gamma)$ B -измерима при фиксированных k, n, Γ , а при фиксированных k, x, n – это вероятностная мера на B . Очевидно, при $k = n$ должно быть $P(k, x, n, \Gamma) = \chi_{\Gamma}(x)$, где $\chi_{\Gamma}(x)$ – индикатор множества Γ .

Если для данной цепи $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ в пространстве (X, B) такая функция $P(k, x, n, \Gamma)$ существует, то она называется вероятностью

перехода. В терминах вероятностей перехода уравнение Колмогорова – Чепмена может быть записано так:

$$P(k, \xi_k, n, \Gamma) = \int_X P(m, y, n, \Gamma) P(k, \xi_k, m, dy).$$

Это равенство выполняется с вероятностью 1. Во многих случаях выполняется более сильное равенство

$$P(k, x, n, \Gamma) = \int_X P(m, y, n, \Gamma) P(k, x, m, dy)$$

для всех $0 \leq k \leq m \leq n$, $x \in X$, $\Gamma \in B$, которое также называется уравнением Колмогорова–Чепмена для вероятностей перехода. Вероятность перехода $P(k, x, n, \Gamma)$ можно интерпретировать как условную вероятность

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k = x\}.$$

Заметим, что условные вероятности вида $P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k = x\}$ для данной случайной последовательности $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ могут удовлетворять уравнению Колмогорова–Чепмена без того, чтобы эта последовательность была цепью Маркова.

Построение цепи Маркова по вероятности перехода. Пусть (X, B) – некоторое измеримое пространство. Предположим, что для всех $x \in X$, $\Gamma \in B$ и целых k, n таких, что $0 \leq k < n$, задана числовая функция $P(k, x, n, \Gamma)$, удовлетворяющая условиям:

- а) при фиксированных k, n, Γ она B -измерима;
- б) при фиксированных k, x, n она является вероятностной мерой на B ;
- в) для всех $0 \leq k < m < n$, $x \in X$ и $\Gamma \in B$ выполнено соотношение

$$P(k, x, n, \Gamma) = \int_X P(k, x, m, dy) P(m, y, n, \Gamma).$$

Спрашивается, существует ли на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) цепь Маркова $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, для которой $P(k, x, n, \Gamma)$ была бы вероятностью перехода, т.е. с вероятностью 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\} = P(k, \xi_k, n, \Gamma).$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1.30 Если функция $P(k, x, n, \Gamma)$ удовлетворяет условиям а) -

в) , то существуют вероятностное пространство (Ω, F, P) и последовательность

$\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных элементов из (X, B) такие, что последовательность

$\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ является цепью Маркова с вероятностью перехода

$P(k, x, n, \Gamma)$.

Указанное вероятностное пространство может быть построено следующим образом. Положим $\Omega = X^\infty$, $F = B^\infty$. Это означает, что элементами множества Ω являются всевозможные последовательности вида $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ где $x_i \in X$, а F – минимальная σ -алгебра подмножеств Ω , содержащая все множества вида

$$\{\omega : x_0 \in \Gamma_0, x_1 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} \quad (1.22)$$

при всевозможных $n = 0, 1, 2, \dots$, $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_n \in B$.

Далее, пусть μ – произвольная вероятностная мера на B . На множествах вида (1.22) зададим числовую функцию P формулой

$$P\{\omega : x_0 \in \Gamma_0, x_1 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(0, x_0, 1, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(1, x_1, 2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(n-1, x_{n-1}, n, dx_n).$$

Эта функция продолжается до вероятностной меры P на измеримом пространстве (Ω, F) . Положим для $n = 0, 1, 2, \dots$ $\xi_n = \xi_n(\omega) = x_n$, если $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$. Тогда на вероятностном пространстве (Ω, F, P) последовательность $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных элементов в (X, B) образует цепь Маркова, для которой заданная функция $P(k, x, n, \Gamma)$ является вероятностью перехода. При этом начальное состояние ξ_0 имеет распределение μ , называемое начальным распределением цепи.

По функции $P(k, x, n, \Gamma)$ цепь Маркова может быть построена неоднозначно: имеется произвол в выборе вероятностного пространства и начального распределения. Однако, если для цепей в одном и том же фазовом пространстве: $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, заданной на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , и $\{\xi'_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, заданной на вероятностном пространстве (Ω', F', P') , – совпадают вероятности перехода и начальные распределения, то такие

цепи стохастически эквивалентны в том смысле, что для любых $n = 0, 1, 2, \dots$ и произвольного набора $\{\Gamma_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ измеримых множеств из фазового пространства выполнено

$$P\{\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi_n \in \Gamma_n\} = P'\{\xi'_0 \in \Gamma_0, \xi'_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi'_n \in \Gamma_n\}.$$

Это означает, что цепь Маркова в указанном смысле однозначно определяется своей вероятностью перехода и начальным распределением.

Однородные цепи Маркова.

Определение однородной цепи Маркова. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) . Цепь Маркова $\{\xi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\}$ в фазовом пространстве (X, B) с вероятностью перехода $P(k, x, n, \Gamma)$ называется однородной, если $P(k, x, n, \Gamma)$ представляет собой функцию от $x \in X, \Gamma \in B$, и $n - k, 0 \leq k < n$. Обозначим через $P(n, x, \Gamma), n > 0, x \in X, \Gamma \in B$, функцию, для которой $P(k, x, n, \Gamma) = P(n - k, x, \Gamma)$. При $n = 0$ естественно положить $P(0, x, \Gamma) = \chi_\Gamma(x)$. Функция $P(n, x, \Gamma)$ называется вероятностью перехода однородной цепи. Она удовлетворяет условиям:

а) при фиксированных n и $\Gamma, n = 0, 1, 2, \dots, \Gamma \in B$, функция $P(n, x, \Gamma)B$ -измерима;

б) при фиксированных n и $x, n = 1, 2, \dots, x \in X$, функция $P(n, x, \Gamma)$ является вероятностной мерой на B ;

в) при всех $0 \leq k < m < n$ и $\Gamma \in B$ с вероятностью 1 выполнено соотношение

$$P(n - k, \xi_k, \Gamma) = \int_X P(n - m, y, \Gamma) \cdot P(m - k, \xi_k, dy).$$

Ниже всюду будет предполагаться, что вероятность перехода однородной цепи Маркова удовлетворяет условиям а) и б) и следующему, несколько более сильному, чем в), условию:

г) при всех $m > 0, n > 0, x \in X, \Gamma \in B$ выполнено соотношение

$$P(m + n, x, \Gamma) = \int_X P(m, x, dy) \cdot P(n, y, \Gamma),$$

называемое уравнением Колмогорова–Чепмена.

Положим $P(x, \Gamma) = P(1, x, \Gamma)$. Функция $P(x, \Gamma)$ называется вероятностью перехода за один шаг. Из уравнения Колмогорова–Чепмена следует, что

вероятность перехода за n шагов, то есть функция $P(n, x, \Gamma)$, выражается через $P(x, \Gamma)$ при помощи рекуррентных соотношений

$$P(n+1, x, \Gamma) = \int_X P(n, y, \Gamma) \cdot P(x, dy) = \int_X P(y, \Gamma) \cdot P(n, x, dy), \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому, зная начальное распределение μ однородной цепи (т.е. меру $\mu(\Gamma) = P\{\xi_0 \in \Gamma\}, \Gamma \in B$) и вероятность перехода за один шаг, можно в принципе определить вероятность произвольного события, связанного с эволюцией рассматриваемой цепи, т.е. произвольного события из σ -алгебры F^0 , порожденной элементами $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$. Именно для событий вида

$$A = \{\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi_n \in \Gamma_n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in B,$$

имеем

$$P(A) = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \cdot \int_{\Gamma_1} P(x_0, dx_1) \cdots \int_{\Gamma_{n-1}} P(x_{n-2}, dx_{n-1}) \cdot P(x_{n-1}, \Gamma_n).$$

Так как события указанного вида образуют алгебру, а F^0 – минимальная σ -алгебра, порожденная этой алгеброй, то вероятность произвольного события из F^0 однозначно восстанавливается по вероятностям всевозможных событий типа события A .

Отсюда следует, что все однородные цепи Маркова в одном и том же фазовом пространстве (возможно, на разных вероятностных пространствах), у которых совпадают начальные распределения и вероятности перехода за один шаг, стохастически эквивалентны. Это означает, что вероятности событий типа события A для всех таких цепей одни и те же.

Вероятность перехода за один шаг $P(x, \Gamma), x \in X, \Gamma \in B$, удовлетворяет условиям:

1) при фиксированном $\Gamma \in B$ функция $P(x, \Gamma)$ B -измерима по x ;

2) при фиксированном $x \in X$ она является вероятностной мерой на B .

Если на некотором измеримом пространстве (X, B) задана функция $P(x, \Gamma), x \in X, \Gamma \in B$, удовлетворяющая условиям 1) и 2), то можно построить однородную цепь Маркова, для которой эта функция была бы вероятностью перехода за один шаг. Разумеется, с заданной вероятностью перехода за один шаг существует не одна цепь. Однако все они отличаются друг от друга (с точностью до стохастической эквивалентности) лишь начальным распределением.

Вероятностное представление решения задачи Дирихле.

Пусть $P(x, \Gamma)$ – вероятность перехода за один шаг некоторой однородной цепи Маркова в фазовом пространстве (X, B) .

Определение 1.31 B -измеримую вещественную функцию $f(x)$, заданную на X , назовем гармонической на множестве $\Gamma \in B$, если для всех $x \in \Gamma$ выполнено равенство $f(x) = Pf(x)$.

Следующая задача является аналогом задачи Дирихле из теории дифференциальных уравнений.

Задача 1.1 Пусть заданы множество $D \in B$ и определенная на множестве

$X \setminus D$ вещественная B -измеримая функция $g(x)$. Требуется найти такую

B -измеримую функцию $f(x)$, чтобы на множестве D она была гармонической,

а вне D совпадала с заданной функцией $g(x)$.

Запишем решение такой задачи в вероятностных терминах. Пусть τ – момент первого попадания во множество $X \setminus D$ для цепи Маркова с вероятностью перехода за один шаг $P(x, \Gamma) : \tau = \inf\{n : n \geq 0, \xi_n \notin D\}$, причем, если для некоторого $\omega \xi_n(\omega) \in D$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то полагаем $\tau(\omega) = +\infty$. Для всех $x \in X$ положим $f(x) = M_x g(\xi_\tau)$. При этом, если $\tau = +\infty$, то считаем $g(\xi_\tau) = 0$; для $x \notin D f(x) = g(x)$. Нетрудно проверить также, что $f(x)$ гармонична на множестве D .

Цепи Маркова с дискретным множеством состояний.

Матрицы вероятностей перехода. Рассмотрим однородные цепи Маркова (ξ_n, P_x) в фазовом пространстве (X, B) в предположении, что X счетно или конечно, а B – σ -алгебра всех подмножеств X . Такие цепи определяются вероятностями перехода за один шаг в одноточечные множества $P(x, y) = P_x\{\xi_1 = y\}$ ($x, y \in X$), ибо для произвольного $\Gamma \subset X$ имеем $P(x, \Gamma) = P_x\{\xi_1 \in \Gamma\} = \sum_{y \in \Gamma} P(x, y)$. Числа $P(x, y)$ ($x, y \in X$) образуют матрицу P , возможно бесконечную, в x -й строке которой расположены вероятности

перехода за один шаг из состояния x во всевозможные состояния $y \in X$, а y -м столбце – вероятности перехода за один шаг из всевозможных состояний $x \in X$ в состояние Y . Элементы матрицы P неотрицательны, и сумма их по строке равна 1. Такие матрицы называются стохастическими. Каждая стохастическая матрица определяет единственную с точностью до эквивалентности однородную цепь Маркова, для которой вероятности перехода за один шаг совпадают с элементами этой матрицы.

Вероятности перехода за n шагов $P(n, x, y)$ также образуют стохастическую матрицу, и она равна n -й степени матрицы P , как это следует из уравнения Колмогорова–Чепмена:

$$P(n, x, y) = \sum_{z_1, \dots, z_{n-1} \in X} P(x, z_1)P(z_1, z_2) \cdots P(z_{n-1}, y),$$

где $x, y \in X$, $n = 2, 3, \dots$. При $n = 0$ естественно считать функцию $P(0, x, y) = 1$ для $x = y$ и $P(0, x, y) = 0$ для $x \neq y$, так что вероятности перехода за 0 шагов образует единичную матрицу I .

В случае, когда X конечно, для вероятностей перехода за n шагов справедлива следующая формула:

$$P(n, x, y) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(m_k - 1)!} \cdot \frac{d^{m_k-1}}{d\lambda^{m_k-1}} \left[\frac{\lambda^n M_{xy}(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}, \quad (1.23)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $x, y \in X$; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ – различные корни уравнения $\det(\lambda I - P) = 0$; m_1, m_2, \dots, m_r – их кратности соответственно; $M_{xy}(\lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента y -й строки и x -го столбца матрицы $\lambda I - P$, $\psi_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{-m_k} \det(\lambda I - P)$.

Мартингалы. Определения. Общие свойства.

Мартингалы и полумартингалы образуют важный класс процессов, обобщающий процессы с независимыми приращениями. Он включает в себя широкий класс процессов – марковские процессы, решения стохастических уравнений, управляемые случайные процессы и др. Разработана специальная "мартингальная" техника изучения случайных процессов. Основы ее излагаются здесь.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{C}, P\}$ – полное вероятностное пространство, на котором задан поток σ -алгебр $(F_t)_{t \in T}$, где T – некоторое подмножество вещественной прямой R . Это означает, что F_t монотонно зависит от t : при $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in T$ будет $F_{t_1} \subset F_{t_2} \subset \mathcal{C}$.

Определение 1.32 Семейство вещественных величин $\xi(t) (t \in T)$ называется *мартингалом*, если $\forall t \in T M|\xi(t)| < \infty$ и

$$M(\xi(t_2)|F_{t_1}) = \xi(t_1), \quad t_1 < t_2, \quad t_1, t_2 \in T. \quad (1.24)$$

Семейство случайных величин $\xi(t) (t \in T)$ называется *супермартингалом*, если $\forall t M\xi(t) = \frac{1}{2}M(|\xi(t)| - \xi(t)) < \infty$ и

$$M(\xi(t_2)|F(t_1), t_1 < t_2, t_1, t_2 \in T. \quad (1.25)$$

Семейство случайных величин $\xi(t) (t \in T)$ называется *субмартингалом*, если $-\xi(t)$ является супермартингалом.

Мартингал является одновременно и супермартингалом, и субмартингалом; верно и обратное: если $\xi(t) (t \in T)$ является супермартингалом и субмартингалом одновременно, то $\xi(t)$ – мартингал. Термины "мартингал" "субмартингал" "супермар" также и к случайным процессам. Более точно, называя процесс мартингалом (супермартингалом), следует указывать поток, относительно которого свойства (1.24) или (1.25) выполнены. Поэтому используется также термин " $(F_t)_{t \in T}$ – мартингал" ("супермартингал"). Иногда термин "мартингал" относят к процессам, для которых (1.24) выполнено для потока, порождаемого самим процессом $\xi(t)$, т.е. когда $F_t = \sigma(\xi(s), s \leq t, s \in T)$ – наименьшая σ -алгебра, относительно которой измеримы все указанные в скобках величины.

В дальнейшем относительно σ -алгебр F_t будет предполагаться, что они содержат все множества P -меры нуль. Тогда всякая модификация мартингала (супермартингала) также будет мартингалом (супермартингалом) относительно того же потока.

Вместо свойств (1.24), (1.25) и аналогичного свойства субмартингала

можно использовать интегральные неравенства:

$$\begin{aligned} \int_A \xi(t_2)P(d\omega) &\leq \int_A \xi(t_1)P(d\omega) \quad (\text{супермартингал}), \\ \int_A \xi(t_2)P(d\omega) &= \int_A \xi(t_1)P(d\omega) \quad (\text{мартингал}), \\ \int_A \xi(t_2)P(d\omega) &\geq \int_A \xi(t_1)P(d\omega) \quad (\text{субмартингал}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

$A \in F_{t_1}$, $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in T$.

Отметим важные примеры мартингала и супермартингала.

Пример 1.33 Пусть η_1, η_2, \dots однородная цепь Маркова в произвольном фазовом пространстве X , $h(x)$ – эксцессивная функция для этой цепи, то есть функция, удовлетворяющая неравенству

$$h(x) \leq \int_X h(y)P(x, dy),$$

где $P(x, dy)$ – вероятности перехода для цепи. Тогда процесс $\xi_n = h(\eta_n)$ является супермартингалом относительно потока $\{F_k, k \geq 1\}$ где $F_k = \sigma(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$

Пример 1.34 Пусть $\eta(t)$ ($t \in T$) – марковский процесс с переходной вероятностью $P(s, x, t, A)$. Если T содержит максимальный элемент t_m , то процесс

$$\xi(t) = P(t, \eta(t), t_m, A)$$

является мартингалом относительно потока

$$F_t = \sigma(\eta(s), s \leq t, s \in T).$$

Некоторые свойства мартингалов.

- 1) Функция $M\xi(t)$, $t \in T$: а) постоянна, если $\xi(t)$ – мартингал, б) не возрастает, если $\xi(t)$ – супермартингал, и в) не убывает, если $\xi(t)$ – субмартингал.
- 2) Если $\xi(t)$ – супермартингал (субмартингал), то для того, чтобы $\xi(h)$ был мартингалом, необходимо и достаточно, чтобы $M\xi(t)$ было постоянным на области определения.

Однородные марковские процессы.

Марковский процесс называется однородным, если вероятность перехода $P(s, x, t, \Gamma)$ обладает тем свойством, что функция $P(s, x, s + h, \Gamma)$ не зависит от x . Если положить $P(h, x, \Gamma) = P(s, x, s+h, \Gamma)$, то для конечномерных распределений процесса будет иметь место равенство

$$P_{sx} \{ \xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n \} = \int_{\Gamma_t} P(t_1 - s, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n) = P_{0x} \{ \xi(t_1 - s) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n - s) \in \Gamma_n \},$$

$$0 \leq s < t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

Таким образом, вместо семейства мер P_{sx} , зависящих от временной и пространственной переменных, в однородном случае достаточно рассматривать семейство мер $P_x = P_{0x}$, зависящих лишь от пространственной переменной. Другими словами, каждый раз, когда процесс выходит из состояния x в момент времени s , мы производим сдвиг времени так, чтобы точка s стала начальной (нулевой). Естественно, что мы должны иметь возможность сдвигать соответственно и все траектории процесса, а это значит, что пространство элементарных событий должно быть достаточно богатым.

Пусть даны:

- а) пространство элементарных событий (Ω, U) ;
- б) случайная величина $\zeta(\omega)$ со значениями в расширенном отрезке $[0, \infty]$;

в) для каждого $t \geq 0$ σ -алгебра F_t в пространстве $\Omega_t\{\omega : \zeta(\omega) > t$, причем если $s \leq t$, то $F_s[\Omega_t] \subseteq F_t \subseteq U$, где $F_s[\Omega_t]$ - след σ -алгебры F_s на множестве Ω_t , т.е. совокупность множества вида $A \cap \Omega_t$, $A \in F_s$;

г) функция двух переменных $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $t \in [0, \zeta(\omega)]$, $\omega \in \Omega$, принимающая значения в некотором измеримом пространстве (X, B) , такая, что при каждом $t \geq 0$ отображение $\xi(t, \cdot)$ пространства (Ω_t, F_t) в пространство (X, B) измеримо; предполагается, что σ -алгебра B содержит все одноточечные множества;

д) для каждого $x \in X$ вероятностная мера P_x на некоторой σ - алгебре F в пространстве Ω , содержащей все F_t , $t \geq 0$.

Система объектов а) – д) образует однородный марковский процесс, если выполнены условия:

1) при любых $t \geq 0$, $\Gamma \in B$ функция $P(t, x, \Gamma) = P_x\{\xi(t) \in \Gamma\}$

B -измерима как функция от x , причем $P(0, x, X \setminus \{x\}) = 0$;

2) для любых $s, t \geq 0$, $\Gamma \in B$

$$P_x\{\xi(t+s) \in \Gamma | F_s\} = P(t, \xi(s), \Gamma)$$

почти наверное относительно меры P_x на множестве Ω_s ;

3) для каждого $\omega \in \Omega_t$, найдется такое $\omega' \in \Omega$, что $\zeta(\omega') = \zeta(\omega) - t$ и $\xi(s, \omega') = \xi(s+t, \omega)$ при $0 \leq s < \zeta(\omega')$.

Условие 2) соединяет в себе свойство марковости процесса и свойство его однородности во времени. Условие 3) означает, что вместе с каждой траекторией процесса произвольный кусок ее после некоторого момента времени также является возможной траекторией. Расширяя, если это нужно, пространство Ω , всегда можно добиться того, чтобы условие 3) выполнялось. Функция $P(t, x, \Gamma)$, определенная в условии 1), называется вероятностью перехода. Из условия 2) следует, что она удовлетворяет уравнению Колмогорова–Чепмена

$$P(s+t, x, \Gamma) = \int_X P(s, x, dy) P(t, y, \Gamma), \quad s, t \geq 0, \quad x \in X, \quad \Gamma \in B.$$

При этом $P(s, x, X) \leq 1$. Если $P(+0, x, X) = \lim_{t \downarrow 0} P(t, x, X) = 1$, то вероятность перехода называется нормальной, а соответствующий процесс – нормальным.

Однородный марковский процесс будем обозначать $(\xi(t), \zeta, F_t, P_x)$. Если $\zeta \equiv +\infty$, то процесс называется необрывающимся и обозначается $(\xi(t), F_t, P_x)$. Для необрывающегося процесса $P(t, x, X) \equiv 1$.

Обозначим через \mathfrak{R}^0 минимальную σ -алгебру подмножеств Ω , содержащую все множества вида $\{\xi(t) \in \Gamma\}$ при $t \geq 0$, $\Gamma \in B$, а через R_t минимальную σ -алгебру подмножеств Ω_t , содержащую все множества вида $\{\xi(s) \in \Gamma\} \cap \Omega_t$ при $s \in [0, t]$, $\Gamma \in B$.

Пусть \mathfrak{R} обозначает след σ -алгебры \mathfrak{R}^0 на множестве $\Omega_0 = \{\zeta > 0\}$. Очевидно, что $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}^0 \subseteq F$, $\mathfrak{R}_t \subseteq F_t$, и вместе с процессом $(\xi(t), \zeta, F_t, P_x)$ однородным марковским процессом будет также процесс $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$.

1.1.3 Основные понятия и задачи математической статистики

Определение 1.35 Если x_1, \dots, x_n – результаты наблюдений (измерений), полученных в ходе выполнения n независимых повторений случайного эксперимента, связанного со случайной величиной ξ с неизвестным распределением P , то вектор $y_n = (x_1, \dots, x_n)$ называется выборкой (простой) объема n из генеральной совокупности с распределением P . Символически модель простой выборки записывается в виде тройки (R^n, C^n, P^n) , называемой выборочным пространством.

Одной из задач математической статистики состоит в том, чтобы на основе анализа выборки сделать научно обоснованное заключение о распределении P .

Обычно постулируется, что неизвестное распределение принадлежит известному семейству (классу) распределений φ . Тройка (R^n, C^n, P^n) дает пример одного из фундаментальных понятий математической статистики – статистической структуры.

Определение 1.36 Пусть (X, \mathfrak{N}) – измеримое пространство, φ – семейство

вероятностных мер на \aleph . Тройка (X, \aleph, \wp) называется статистической структурой.

В большинстве конкретных рассмотрений семейство вероятностных распределений \wp параметризовано:

$$\wp = (P_\theta, \theta \in \Theta), \quad (1.27)$$

где Θ – произвольное множество, P_θ – однозначно определяемое распределение при известном значении параметра θ . Основная статистическая структура классической математической статистики – это структура, отвечающая модели простой выборки вида

$$(X^n, \aleph^n, \{P_\theta, \theta \in \Theta\}),$$

где $X \subset R$, Θ – область в R^k , $k < n$, $P_\theta = \prod_{\theta^n} - n$ – кратное произведение распределений \prod_θ на X .

Статистика. Определение статистики и оценки.

Определение 1.37 Пусть (X, \aleph, \wp) – статистическая структура и (Y, U) – произвольное измеримое пространство. Любое (\aleph, U) – измеримое отображение T пространства (X, \aleph) в (Y, U) называется статистикой на статистической структуре (X, \aleph, \wp) .

Определение 1.38 Статистику T , принимающей значения в пространстве параметров Θ , называют оценкой.

Пусть T – вещественная статистика, заданная на статистической структуре (X, \aleph, \wp) . Для всякого фиксированного распределения P из \wp статистика T как отображение вероятностного пространства (X, \aleph, P) в (R, C) является случайной величиной.

Определение 1.39 Если статистика T имеет математическое ожидание для любого распределения P из \wp , то ее называют интегрируемой.

Достаточные статистики.

Пусть $(X, \mathfrak{N}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ – статистическая структура, Y – полное метрическое сепарабельное пространство, U – σ -алгебра борелевских множеств, $T : (X, \mathfrak{N}) \rightarrow (Y, U)$ – статистика; $\mathfrak{N}_T = T^{-1}(U)$ – прообраз σ -алгебры U при отображении T .

Определение 1.40 Статистика T называется достаточной (для параметра θ), если условная вероятность

$$P_\theta(A|\mathfrak{N}_T), \theta \in \Theta, A \in \mathfrak{N},$$

не зависит от θ .

Таким образом, если статистика T достаточна, то условная вероятность $P_\theta(A|\mathfrak{N}_T)$ не содержит никакой информации о параметре θ .

Оценка параметра распределения. Предполагается, что неизвестная функция распределения принадлежит некоторому семейству распределений $F(\theta, x)$, зависящему от некоторого параметра $\theta \in \Theta$, где Θ – множество на прямой или в конечномерном евклидовом пространстве. Это значит, что распределение зависит от одного или нескольких вещественных параметров. Так, например, семейство нормальных распределений на прямой зависит от двух вещественных параметров – среднего значения и дисперсии. Нужно по наблюдениям оценить параметр (или несколько вещественных параметров). Для построения оценок используются статистики – функции от выборочных значений. Примерами статистик являются:

выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k;$$

выборочная дисперсия

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

(здесь x_1, \dots, x_n – выборка объема n). В качестве оценки вещественного параметра θ используется некоторая статистика, $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая

рассматривается как приближенное значение неизвестного параметра. Качество оценки определяется распределением величины

$$\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta$$

(это распределение, очевидно, зависит от значения искомого параметра). Оценка будет хорошей, если это распределение достаточно сосредоточено возле нуля. В практике обычно ограничиваются лишь двумя первыми моментами оценки. В этом случае оценка характеризуется смещением

$$M_\theta \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta$$

и дисперсией

$$M_\theta [\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - M_\theta \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2$$

(M_θ) обозначает математическое ожидание в предположении, что истинное распределение совпадает с $F(\theta, x)$.

Определение 1.41 *Оценки, для которых смещение равно нулю, называются несмещенными.*

Для несмещенных оценок качество определяется величиной дисперсии: чем она меньше, тем оценка лучше.

Теория оценивания параметров. Задача оценивания и свойства оценок.

Постановка задачи. Пусть $\{X^n, \aleph^n, P^n\}$, где $P = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – (параметризованная) статистическая структура модели простого выбора, связанная с наблюдением над случайным элементом ξ , принимающим значения в X . Считается, что в множестве Θ допустимых значений параметра θ существует такое θ_0 , что распределение элемента ξ совпадает с P_{θ_0} , т.е. $P\{\xi \in \Gamma\} = P_{\theta_0}(\Gamma), \Gamma \in \aleph$. Значение θ_0 называется истинным значением параметра.

Задача 1.2 *Предположим, что истинное значение θ_0 неизвестно. На основании эксперимента над ξ , т.е. по выборке $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, оценить θ_0 .*

Процедура оценивания состоит в том, что, во-первых, строится статистика $\theta^* = \theta^*(x) : X^n \rightarrow \Theta$, обладающая рядом предпочтительных свойств, и, во-вторых, вместо аргументов в $\theta^*(x) = \theta^*(x_1, \dots, x_n)$ подставляется выборка – результаты наблюдений. Полученное значение (реализация случайной величины $\theta^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, где ξ_i независимы и одинаково с ξ распределены) и принимается в качестве оценки истинного значения параметра θ_0 . Таких оценок можно построить бесконечно много, и возникает вопрос, какие из них предпочесть. Ответ неоднозначен, так как можно вводить различные критерии качества оценок.

Принципы построения оценок. Естественно считать, что качество оценки θ^* зависит от близости θ^* к истинному значению параметра. Термин "близость" нуждается в уточнении. Во-первых, можно по-разному вводить понятие близости в множестве Θ . Например, если Θ – метрическое пространство, то можно считать мерой близости между элементами $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ расстояние между ними. Более общим образом на множестве Θ можно ввести функцию потерь $r(\theta_1, \theta_2) (\theta_1, \theta_2 \in \Theta)$, т.е. неотрицательную функцию, интерпретируемую как потери, которые мы несем, если принимаем в качестве оценки истинного значения параметра значение θ_2 , в то время как истинное значение равно θ_1 . В этом случае оценка θ^* тем ближе к θ , чем меньше потери $r(\theta, \theta^*)$. Во-вторых, так как результаты наблюдений $x \in X^n$ случайны, то оценка $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет собой случайный элемент, и поэтому близость θ^* к θ должна пониматься в некотором усредненном смысле. Например, можно считать, что θ^* близко к θ , если малы средние потери

$$M_{\theta} r(\theta, \theta^*(x_1, \dots, x_n)) = \int \dots \int r(\theta, \theta^*(x_1, \dots, x_n)) P_{\theta}(dx_1) \dots P_{\theta}(dx_n).$$

Однако, для данной оценки $\theta^*(x_1, \dots, x_n)$ эти потери могут быть малыми при одних θ и достаточно большими при других. Разумеется, если бы существовала такая оценка $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что для любой другой $\theta_1^*(x_1, \dots, x_n)$ при всех $\theta \in \Theta$ выполнялось неравенство

$$M_{\theta} r(\theta, \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) \leq M_{\theta} r(\theta, \theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

то с точки зрения выбранной меры близости ее следовало бы предпочесть любой другой оценке. Однако, такой оценки не существует. Поэтому для выбора оценки неизвестного параметра принимают во внимание некоторые дополнительные соображения.

Можно выбрать оценку $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ так, чтобы значение функции

$$\sup_{\theta \in \Theta} M_{\theta r}(\theta, \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

было минимальным. Этот принцип выбора оценок носит название *принципа минимакса*, а соответствующие оценки, если они существуют, называются *минимаксными*. При таком подходе мы стараемся минимизировать максимальный убыток, связанный с выбором той или иной оценки.

Другим подходом к выбору оценки является так называемый *байесовский* подход: считается, что имеются некоторые априорные соображения о предпочтительности тех или иных значений параметра θ . Другими словами, на пространстве Θ считается заданным некоторое априорное распределение $\mu(d\theta)$. Оценка $\theta^*(x_1, \dots, x_n)$ выбирается так, чтобы значение интеграла

$$\int_{\Theta} M_{\theta r}(\theta, \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) \mu(d\theta)$$

было минимальным. Возможны и другие принципы построения оценок.

Неравенство Крамера–Рао. В дальнейшем будем предполагать, что множество Θ является некоторым интервалом в R или же некоторой областью в евклидовом пространстве R^d . Множество X , как правило, будет совпадать с R .

Определение 1.42 Назовем оценку $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *несмещенной*, если при всех $\theta \in \Theta$

$$M_{\theta} \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta.$$

В классе несмещенных оценок естественно считать лучшей ту оценку, распределение которой при всех θ концентрируется "теснее" вокруг среднего значения, т.е. вокруг θ . В случае, когда θ – одномерный параметр, мерой такой концентрации распределения может служить дисперсия распределения. Таким образом, мы приходим к задаче:

Задача 1.3 Найти в классе всех несмещенных оценок такой оценки

$\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой при каждом $\theta \in \Theta$ значение функции

$$M_\theta(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)^2$$

минимально.

Оказывается, что это выражение ограничено снизу некоторой функцией от θ , так что, если для некоторой оценки $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ эта нижняя граница для дисперсии достигается при всех θ , то это и будет искомая оценка.

Предположим, что распределение $P_\theta(dx)$ ($\theta \in \Theta$) (здесь θ – одномерный параметр) имеет плотность $p(\theta, x)$ относительно некоторой σ -конечной меры $\nu(dx)$ на (X, \mathfrak{N}) . В частности, $P_\theta(dx)$ может быть дискретным распределением сосредоточенным в точках $z_1, z_2, \dots \in X$. При этом точки z_1, z_2, \dots не зависят от θ и $p(\theta, z_k)$ – масса (вероятность), соответствующая точке z_k , так что $\sum_k p(\theta, z_k) = 1$.

Предположим далее, что плотности $p(\theta, x)$ дифференцируемы по θ , причем для любого измеримого множества Γ из X

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\Gamma} p(\theta, x) \nu(dx) = \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\theta, x)}{\partial \theta} \nu(dx).$$

Положим

$$I(\theta) = \int_X \left[\frac{\partial \log p(\theta, x)}{\partial \theta} \right]^2 p(\theta, x) \nu(dx), \quad \theta \in \Theta.$$

Определение 1.43 Величина $I(\theta)$ называется количеством информации о параметре θ , содержащемся в одном наблюдении. В дискретном случае

$I(\theta)$ запишется в виде

$$I(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \log p(\theta, z_k)}{\partial \theta} \right]^2 p(\theta, z_k).$$

Количество информации о θ , содержащееся в независимых наблюдениях x_1, x_2, \dots, x_n , равно $nI(\theta)$.

Пусть $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная несмещенная оценка параметра θ . При некоторых условиях регулярности имеет место неравенство

$$\sigma_{\theta}^2(\theta^*) = M_{\theta}(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)^2 \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \quad (1.28)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \log p(\theta, x_k)}{\partial \theta} = \lambda[\theta^*(x_1, \dots, x_n) - \theta]$$

для почти всех $x \in X^n$ относительно меры $p(\theta, x_1) \cdots p(\theta, x_n) \nu(dx_1) \cdots \nu(dx_n)$. здесь λ не зависит от x_1, x_2, \dots, x_n , однако может зависеть от θ .

Упомянутые условия регулярности состоят в выполнении равенства

$$M_{\theta} \frac{\log L(\theta, x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} = \int_X \cdots \int_X \frac{\partial \log L}{\partial \theta} L \nu(dx_1) \cdots \nu(dx_n) = 0,$$

где $L(\theta, x_1, \dots, x_n) = p(\theta, x_1)p(\theta, x_2) \cdots p(\theta, x_n)$, а также в возможности продифференцировать по θ равенство

$$\int_X \cdots \int_X \theta^*(x_1, \dots, x_n) L(\theta, x_1, \dots, x_n) \nu(dx_1) \cdots \nu(dx_n) = 0.$$

Определение 1.44 *Неравенство (1.28) называется неравенством Крамера*

– Рао и дает нижнюю границу для дисперсии несмещенной оценки.

Определение 1.45 *Если для оценки $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в неравенстве*

(1.28) достигается равенство, то такая оценка называется эффективной.

Таким образом, среди несмещенных регулярных оценок эффективные оценки имеют минимальную дисперсию.

Определение 1.46 *Назовем эффективностью оценки $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$*

отношение нижней границы для дисперсии оценки к фактической дисперсии

оценки:

$$eff(\theta^*) = \frac{1}{nI(\theta)} \cdot \frac{1}{\sigma_{\theta}^2(\theta^*)}.$$

Очевидно, что $0 \leq eff(\theta^*) \leq 1$. Две эффективные оценки одного и того же параметра почти наверное совпадают при каждом θ .

Мы ниже приведем более практические определения оценок.

Точечное оценивание.

Пусть (x_1, \dots, x_n) — n -мерная случайная величина с функцией распределения $F_n(x_1, \dots, x_n; \theta)$, где θ — одномерный действительный параметр с параметрическим пространством Ω .

Пусть $\tilde{\theta}(x_1, \dots, x_n)$, или кратко $\tilde{\theta}$, — функция от (x_1, \dots, x_n) и является случайной величиной.

Определение 1.47 Если полученное значение $\tilde{\theta}$, соответствующее значению

(x_1, \dots, x_n) , используется вместо θ_0 , истинного значения θ , то случайная

переменная $\tilde{\theta}$ называется точечной оценкой или просто оценкой для θ_0 .

Так используют $\tilde{\theta}$ только в том случае, когда величина θ_0 неизвестна.

Если при $\theta = \theta_0$ $M(\tilde{\theta}) = \theta_0$, что мы будем короче записывать в виде $M(\tilde{\theta}|\theta_0) = \theta_0$, то $\tilde{\theta}$ называется несмещенной оценкой для θ_0 . Было бы точнее сказать, что $\tilde{\theta}$ — оценка для θ_0 , несмещенная в среднем. Если бы $\tilde{\theta}$ была статистикой с функцией распределения $W(\tilde{\theta}; \theta_0)$, непрерывной при $\tilde{\theta} = \theta_0$ и такой, что $W(\theta_0; \theta_0) = \frac{1}{2}$, мы сказали бы, что $\tilde{\theta}$ — оценка для θ_0 , несмещенная по медиане. Ниже, если не оговорено противное, несмещенная оценка будет пониматься как несмещенная в среднем.

Определение 1.48 Если оценка $\tilde{\theta}$ сходится по вероятности к θ_0 при

$n \rightarrow \infty$, она называется состоятельной оценкой для θ_0 .

Определение 1.49 Если $\tilde{\theta}$ — несмещенная оценка для θ_0 , имеющая конечную

дисперсию, и при этом не существует никакой другой несмещенной

оценки с меньшей дисперсией, то $\tilde{\theta}$ называется эффективной оценкой для θ_0 .

Определение 1.50 Если $\tilde{\theta}$ – такая статистика, что для любой другой статистики $\check{\theta}$ условная случайная величина $\check{\theta}|\tilde{\theta}$ имеет распределение, не зависящее от θ_0 , то $\tilde{\theta}$ называется достаточной оценкой для θ_0 .

Для простоты случайного выбора, т.е. когда (x_1, \dots, x_n) – случайная выборка объема n из совокупности с функцией распределения $F(x; \theta)$, понятия несмещенности, состоятельности, достаточности и эффективности имеют особое значение. В этом случае

$$F_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{\xi=1}^n F(x_\xi; \theta). \quad (1.29)$$

Определение 1.51 Для данной выборки (x_1, \dots, x_n) величина $dF_n = \prod_{\xi=1}^n dF(x_\xi; \theta)$ называется элементом правдоподобия θ для (x_1, \dots, x_n) .

Нижняя граница дисперсии оценки. Пусть (x_1, \dots, x_n) – n -мерная случайная переменная с функцией распределения $F(x_1, \dots, x_n; \theta)$. Если $\tilde{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ – несмещенная оценка для θ , то

$$\int_{R_n} (\tilde{\theta} - \theta) dF_n = 0. \quad (1.30)$$

Если $F_n(x_1, \dots, x_n)$ регулярна относительно ее первой производной по θ в некотором (открытом) интервале Ω_0 , содержащем θ_0 – истинное значение θ , то мы можем дифференцировать (1.30) под интегралом и получить

$$\int_{R_n} (\tilde{\theta} - \theta) S_n(x_1, \dots, x_n; \theta) dF_n = 1, \quad (1.31)$$

где

$$S_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{\partial \log dF_n}{\partial \theta}, \quad (1.32)$$

Применяя неравенство Шварца к (1.31), получаем

$$1 = \left[\int_{R_n} (\tilde{\theta} - \theta) S_n dF_n \right]^2 \leq \int_{R_n} (\tilde{\theta} - \theta)^2 dF_n \int_{R_n} S_n^2 dF_n.$$

Так как

$$\sigma^2(\tilde{\theta}) = \int_{R_n} (\tilde{\theta} - \theta)^2 dF_n, \quad (1.33)$$

находим

$$\sigma^2(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{M(S_n^2)}, \quad (1.34)$$

причем равенство имеет место в том и только в том случае, когда

$$K[\tilde{\theta}(x_1, \dots, x_n) - \theta] \equiv S_n(x_1, \dots, x_n; \theta) \quad (1.35)$$

в R_n с вероятностью 1, где K может зависеть от θ , но не зависит от (x_1, \dots, x_n) .

Если равенство имеет место, то $\tilde{\theta}$ – эффективная оценка для θ ; в этом случае (1.35) дает форму, которая имеет $\tilde{\theta}$.

Если обозначить $\sigma^2(\tilde{\theta})$ при $\theta = \theta_0$ через $\sigma^2(\tilde{\theta}|\theta_0)$, положив $\theta = \theta_0$ в (1.33), и взять соответствующее выражение для $M(S_n^2|\theta_0)$, то

$$\sigma^2(\tilde{\theta}|\theta_0) \geq \frac{1}{M(S_n^2|\theta_0)}.$$

Эффективная оценка для θ обычно обозначается $\hat{\theta}$. Таким образом, мы получили следующий результат:

Предложение 1.1 Пусть (x_1, \dots, x_n) – случайная величина с функцией

распределения $F_n(x_1, \dots, x_n; \theta)$, регулярной относительно ее первой производной

по θ в Ω_0 , где θ – одномерный параметр. Если

$\tilde{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ – несмещенная оценка для θ_0 , то $\sigma^2(\tilde{\theta}|\theta_0) \geq \frac{1}{M(S_n^2|\theta_0)}$, где

S_n дается выражением (1.32), причем равенство имеет место в том

и только в том случае, когда справедливо (1.35) с вероятностью 1 при

$\theta = \theta_0$. Если эффективная оценка $\hat{\theta}$ для θ_0 существует, то ее дисперсия

$$\text{равна } \frac{1}{M(S_n^2|\theta_0)}.$$

Нижние границы для $\sigma^2(\tilde{\theta}|\theta_0)$ без предположения регулярности. Если существует эффективная оценка $\hat{\theta}$ для θ_0 и если $\tilde{\theta}$ – любая другая несмещенная оценка для θ_0 , то эффективность $\tilde{\theta}$ для оценивания θ_0 определяется отношением

$$eff(\tilde{\theta}|\theta_0) = \frac{\sigma^2(\hat{\theta}|\theta_0)}{\sigma^2(\tilde{\theta}|\theta_0)}. \quad (1.36)$$

Случайный выбор. В этом случае имеет место (1.29) и

$$S_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \sum_{\xi=1}^n S(x_\xi; \theta), \quad (1.37)$$

где

$$S(x; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log dF(x; \theta). \quad (1.38)$$

Определение 1.52 Сумма $\sum_{\xi=1}^n S(x_\xi; \theta)$ называется информантом для θ , основанным на (x_1, \dots, x_n) .

Кроме того,

$$M(S_n^2) = nM(S^2) = nB^2(\theta, \theta), \quad (1.39)$$

где $B^2(\theta, \theta)$ определяется по формуле

$$B^2(\theta, \theta') = \int_{-\infty}^{\infty} [S(x; \theta')]^2 dF(x; \theta). \quad (1.40)$$

Поэтому (1.34) сводится к

$$\sigma^2(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{nB^2(\theta, \theta)}. \quad (1.41)$$

Этот результат первоначально был получен Фишером. Позднее он был установлен Крамером, Дюге и Рао (см. неравенство Крамера–Рао и [48] [49] [29]). Равенство в (1.40) имеет место в том случае, когда

$$K(\tilde{\theta} - \theta) \equiv \sum_{\xi=1}^n S(x_\xi; \theta) \quad (1.42)$$

на R_n с вероятностью 1, причем K не зависит от (x_1, \dots, x_n) .

Таким образом, если существует эффективная оценка $\hat{\theta}$, то ею является статистика $\tilde{\theta}$, удовлетворяющая (1.41), и ее дисперсия дается равенством

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = \frac{1}{nB^2(\theta, \theta)}. \quad (1.43)$$

Итак, мы имеем следующее важное следствие:

Следствие 1.1 Если (x_1, \dots, x_n) – выборка из совокупности с функцией распределения $F(x; \theta)$, регулярной относительно ее первой производной по θ в Ω_0 , и если $\tilde{\theta}$ – несмещенная оценка для θ_0 , то $\sigma^2(\tilde{\theta}|\theta_0) \geq \frac{1}{nB^2(\theta_0, \theta_0)}$, где $B^2(\theta, \theta)$ дается формулой (1.40). Равенство имеет место в том случае, когда $\tilde{\theta}$ удовлетворяет (1.42) и является эффективной оценкой для θ_0 с дисперсией $\frac{1}{nB^2(\theta_0, \theta_0)}$.

Предложение 1.2 Если $\tilde{\theta}$ – произвольная несмещенная оценка для θ и если существует эффективная оценка $\hat{\theta}$, то эффективность $\tilde{\theta}$ при оценивании θ_0 определяется равенством

$$eff(\tilde{\theta}|\theta_0) = \frac{\sigma^2(\hat{\theta}|\theta_0)}{\sigma^2(\tilde{\theta}|\theta_0)} = \frac{1}{\sigma^2(\sqrt{n}\tilde{\theta}|\theta_0)B^2(\theta_0, \theta_0)}. \quad (1.44)$$

Определение 1.53 Назовем величину $nB^2(\theta_0, \theta_0)$, обратную дисперсии эффективной оценки $\hat{\theta}$, количеством информации, содержащимся в выборке относительно θ_0 , а $B^2(\theta_0, \theta_0)$ – количество информации о θ_0 на одно наблюдение.

С этой точки зрения эффективность оценки $\tilde{\theta}$ для θ можно рассматривать как отношение информации, содержащейся в $\tilde{\theta}$ при оценивании θ_0 , к информации, содержащейся в эффективной оценке.

Нижняя граница дисперсии смешанной оценки.

Крамер и Дюге обобщили понятие "нижняя граница дисперсии рассмотрев смещенную оценку $\tilde{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ для θ . В этом случае мы замещаем $(\tilde{\theta} - \theta)$ в (1.30) выражением

$$[\tilde{\theta} - \theta - b_n(\theta)], \quad (1.45)$$

где $b_n(\theta)$ – смещение оценки $\tilde{\theta}$, и повторяем рассуждения предыдущего Следствия. В (1.31) мы заменяем $(\tilde{\theta} - \theta)$ на $(\tilde{\theta} - \theta - b_n(\theta))$ и 1 в правой части на $1 + b'_n(\theta)$, где $b'_n(\theta) = \frac{d}{d\theta} b_n(\theta)$. Вместо (1.41) получаем

$$\sigma^2(\tilde{\theta}) \geq \frac{[1 + b'_n(\theta)]^2}{nB^2(\theta, \theta)}, \quad (1.46)$$

причем равенство имеет место в том случае, когда

$$K[\tilde{\theta} - \theta - b_n(\theta)] \equiv \sum_{\xi=1}^n S(x_\xi; \theta) \quad (1.47)$$

на R_n с вероятностью 1, причем K не зависит от (x_1, \dots, x_n) . [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59].

2

Общая схема методов Монте–Карло.

Постановка задачи

2.1 Схема методов Монте–Карло

При использовании метода Монте–Карло моделируются случайные величины с известными законами распределения, и из этих величин по известным правилам конструируются более сложные, распределение которых уже не может быть найдено аналитически. Эти результирующие распределения могут быть известны с точностью до параметров – в этом случае используется аппарат математической статистики для оценивания этих параметров. В случае, когда вид результирующего распределения неизвестен, используются непараметрические методы.

Моделирование более сложного случайного процесса при помощи известной простой случайной величины является основным содержанием методов Монте–Карло. Одной из самой простой случайной величиной может служить случайная величина, равномерно распределенная на промежутке $[0,1]$. Известно много способов построения, с любой заданной точностью, (хотя бы бросанием монеты) случайной величины равномерно распределенной

на $[0,1]$. Подобный способ задания случайной величины называют конструктивным. Тогда, естественно требовать, чтобы рассматриваемые вероятностные пространства тоже были конструктивными. Под конструктивным вероятностным пространством будем понимать такое вероятностное пространство (Ω, U, P) , для которого существует измеримое отображение $\omega = \varphi(x), x \in [0, 1], \omega \in \Omega$, отрезка $[0,1]$ в Ω такое, что для любого $A \in U \mu A = \int_B dx$, где $B = x : \varphi(x) \in A$. Таким образом, требование конструктивности вероятностного пространства означает, что случайная величина, определенная на нем, должна выражаться через равномерно распределенные на $[0,1]$ случайные величины. Последние же, как отмечалось, могут быть заданы конструктивно.

При конструктивном задании случайные величины являются функциями указанных совокупностей, равномерно распределенных случайных величин, а математические ожидания функционалов от процессов являются интегралами по единичному гиперкубу счетной кратности. Если вернуться к задаче моделирования равномерно распределенной случайной величины, то мы увидим, что последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, независимых реализаций величины должна обладать, по меньшей мере, тем свойством, что для случайных величин, конструируемых с ее помощью, должен иметь место усиленный закон больших чисел. Это означает, что при любом конечном s для любой интегрируемой функции $F_s(x_1, \dots, x_n)$ должны выполняться соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N f_s(\alpha_{is}, \alpha_{i(s+1)}, \dots, \alpha_{(i+1)s-1}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f_s(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие предложения, которые дают необходимые алгоритмы моделирования распределений.

Предложение 2.1 (преобразование Н.В. Смирнова). Если ξ удовлетворяет

уравнению

$$\int_{-\infty}^{\xi} dF_{\xi}(t) = \alpha \quad (\xi = F_{\xi}^{-1}(\alpha)), \quad (2.1)$$

где α – величина, распределенная равномерно на $[0, 1)$, то ξ распределена по закону $F_\xi(x)$.

Метод предложенный фон Нейманом основан на следующем:

Предложение 2.2 (метод Неймана). Пусть $\varphi(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) – неотрицательная функция, определенная и интегрируемая в n -мерном параллелепипеде $D = \{a_i \leq x_i \leq b_i\}_{i=1}^n$ и $\varphi(x) \leq M$ для $x \in D$, где M – константа. Если $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ и α – независимые случайные величины, распределенные равномерно в D и на $[0, 1]$, соответственно, то плотность условного распределения $P\{\beta_i \leq x_i; i = 1, \dots, n \mid \varphi(\beta) \geq M \cdot \alpha\}$ совпадает с $c \cdot \varphi(x)$, где c – константа нормировки.

Доказательства этих предложений можно найти в работе [12].

Последовательности, для которых выполняются данное соотношение, изучаются в теории чисел. Этот раздел методов Монте–Карло в данной работе рассматриваться не будет.

Методы построения отображения $\omega = \phi(x)$, т.е. методы с помощью которых реализации случайных величин с различными законами распределения выражаются через реализации $\alpha \in [0, 1]$, во многих конкретных случаях могут быть достаточно сложными в вычислительном отношении.

Задача методов Монте–Карло после получения ряда реализаций интересующей нас случайной величины ξ заключается в получении некоторых сведений о ее распределении, т.е. является типичной задачей математической статистики. При этом наиболее распространенной вычислительной задачей является задача оценки среднего значения некоторой случайной величины, так называемая задача вычисления интеграла типа Лебега по некоторой конструктивной вероятностной мере. Последняя может иметь весьма сложную природу и задаваться как композиция более простых мер.

Наиболее изучен случай, когда существует конечный второй момент

случайной величины. Наиболее простая вычислительная схема при этом заключается в следующем. Вычисляется N независимых реализаций случайной величины, и ее математическое ожидание оценивается с помощью среднего арифметического этих реализаций. Основанием служит тот факт, что среди линейных несмещенных оценок среднее арифметическое имеет наименьшую дисперсию. Оценка погрешности может быть получена с помощью неравенства Чебышева и имеет вероятностный характер.

Для фиксированной достаточно малой величины $\gamma = \sigma^2/(N\varepsilon^2)$ получим

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\xi_i - M\xi\right| < \frac{\sigma}{(N\gamma)^{1/2}}\right\} > 1 - \gamma, \quad (2.2)$$

(смотри неравенство Чебышева (1.19)), Где ξ_1, \dots, ξ_n – независимые и одинаково распределенные случайные величины, $M\xi_k = a < \infty$, $D\xi_k = \sigma^2 < \infty$ ($k = 1, \dots, n$). Из неравенства (2.2) следует, что с вероятностью $1 - \gamma$ среднее арифметическое независимых реализаций ξ отличается от $M\xi = a$ не более, чем на $\varepsilon = \sigma/\sqrt{N\gamma}$. При фиксированных γ и σ погрешность убывает, таким образом, как $N^{-1/2}$.

Если для оценки погрешности используется центральная предельная теорема, то при достаточно большом N величину $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\xi_i$ можно считать распределенной нормально со средним $M\xi$ и дисперсией σ^2/N , что дает возможность построить доверительный интервал и оценить погрешность. При этом необходимо, чтобы распределение величины $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\xi_i$ отличалось от нормального не более, чем на величину порядка $N^{-1/2}$. Дисперсия, которая определяет погрешность, может быть также оценена в процессе вычислений. Таким образом, имеется возможность определить в процессе вычислений число N , гарантирующее необходимую точность с заданной вероятностью (надежностью). Таким образом, эта задача тесно связана с задачей оценки параметров нормального распределения. При этом оценка математического ожидания дает решение задачи, а оценка дисперсии обеспечивает оценку погрешности. Хотя порядок убывания погрешности $O(N^{-1/2})$ недостаточно высокий для точных вычислений, то имеются различные способы преобразования случайных величин, сохраняющие их среднее значение, но изменяющие дисперсию в меньшую сторону. Такая возможность преобразования случайных величин вытекает из равенства

$$M\xi = \int \xi(\omega)P(d\omega) = \int \xi(\omega)\frac{dP}{d\mu}(\omega)\mu(d\omega),$$

где $\mu \gg P$. Это представление даст возможность вычислять вместо среднего значения ξ по мере P среднее значение $\xi \frac{dP}{d\mu}$ по мере μ . Если

$$D_\xi = \int \xi^2(\omega)P(d\omega) - (M\xi)^2,$$

то

$$D\left(\xi \frac{dP}{d\mu}\right) = \int \left(\xi \frac{dP}{d\mu}\right)^2 \mu(d\omega) - (\mu\xi)^2,$$

и, вообще, $D\xi \neq D\left(\xi \frac{dP}{d\mu}\right)$. С вычислительной точки зрения, недостаточно

выбрать μ таким образом, чтобы $D\left(\xi \frac{dP}{d\mu}\right)$ была меньше, чем $D\xi$, так как моделирование случайной величины $\xi \frac{dP}{d\mu}$ может оказаться значительно сложнее, чем моделирование исходной. Поэтому используют преобразования, уменьшающие вычислительную работу, необходимую для достижения заданной точности при данной надежности. Преобразования, сохраняющие математическое ожидание случайной величины, но изменяющие ее дисперсию, называют модификациями методов Монте–Карло.

В последнее время интенсивно разрабатываются методы Монте–Карло для приближенного решения краевых задач. Для решения краевых задач можно выделить три подхода к построению методов Монте–Карло.

Метод 2.1 *Дискретизация дифференциального уравнения разностным, и полученную систему линейных алгебраических уравнений решить моделированием дискретных цепей Маркова с конечным числом состояний.*

В этом случае однородная цепь Маркова с N состояниями p , φ рассматривается в дискретные моменты времени, где $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – распределение вероятностей начальных состояний, а $\varphi = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – переходная стохастическая матрица. Для элементов матрицы φ выполняются соотношения $\sum_{j=1}^n p_{i,j} =$

$1, i = 1, \dots, n, p_{i,j} \geq 0, i, j = 1, \dots, n$, так что ее строка с номером i представляет собой распределение вероятностей.

Эта вычислительная схема была впервые предложена Дж. фон Нейманом и Уламом.

Метод 2.2 Представление решения в виде континуального интеграла и вычисление его методом Монте–Карло. Точнее, приближенное интегрирование континуального интеграла в функциональных пространствах можно осуществить по гауссовым мерам или можно оценивать по мере Винера методом Монте–Карло, основываясь на кусочно-линейные аппроксимации винеровского процесса или с помощью других приближенных формул разложения меры.

Метод 2.3 Сведения исходной дифференциальной задачи к специальному интегральному уравнению и решение этого интегрального уравнения методами Монте–Карло. В этом случае широко используется математический аппарат преобразования уравнений математической физики.

Во всех этих подходах решение $u(x)$ записывается в виде математического ожидания некоторой случайной величины $\xi(x)$ такой, что $u(x) = M\xi(x)$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ – независимые реализации случайной величины $\xi(x)$. Тогда в силу закона больших чисел среднее $\bar{\xi} = (\xi_1 + \xi_2 + \dots +$

$\xi_n)/N$ при $N \rightarrow \infty$ сходится с вероятностью 1 к $u(x)$. Центральная предельная теорема позволяет оценить доверительный интервал для $u(x)$, если $D\xi(x) < \infty$.

Различие трех приведенных подходов состоит в выборе случайного процесса, на траекториях которого строится оценка $\xi(x)$. В первом варианте – это случайные блуждания по узлам сетки, во втором – диффузионный, естественным образом связанный с дифференциальным оператором, в третьем – специальный марковский процесс с дискретным временем. Первый подход является наиболее универсальным и приводит к простым численным алгоритмам, которые, однако, в ряде случаев оказываются значительно более трудоемкими, чем алгоритмы, основанные на других подходах. Поэтому представляет интерес разработка других различных вероятностных моделей, связанных с дифференциальными уравнениями, в частности развитие 2.3 метода.

В данной диссертационной работе используются 2.1 и 2.3.

Трудоемкость статистических алгоритмов определяется произведением среднего времени расчетов, необходимого для реализации одного значения оценки, на ε^{-2} , где ε – требуемая погрешность вычислений. Объем вычислений в 2.1 имеет порядок ε^{-3} . Надо отметить, 2.3 позволяет одновременно вычислять и производные от решения, что важно для многих практических задач. Применения 2.1, 2.2, 2.3 для решения различных задач математической физики можно найти в работа [12], [13], [14], [17], [18], [45], [2], [85], [86], [87], [91], [93], [94], [97], [109].

2.2 Процесс "блуждания по сферам".

Вероятностные представления решений некоторых краевых задач винеровскими интегралами дают возможность оценивать такие решения путем моделирования винеровского процесса на ЭВМ. Однако, строить винеровские траектории можно только приближенно, например, заменяя их кусочно-линейными траекториями. При достаточно широких предположениях относительно осредняемого функционала трудоемкость алгоритма, основанного на кусочно-линейной аппроксимации процесса, определяется величиной ε^{-3} , где ε – требуемая погрешность в оценке решения. Эта оценка трудоемкости связана с необходимостью построения узловых значений траекторий с

шагом $\Delta t \sim \varepsilon$.

Специфика винеровских интегралов, выражающих решения краевых задач, иногда позволяет для их оценки строить траекторию процесса менее подробно. Например, при оценке решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа с помощью представления

$$u(P) = M[\varphi(\xi_P(\tau))],$$

достаточно моделировать выход винеровского процесса $\xi_P(t)$ на границу данной области. Это можно делать приближенно, моделируя последовательно выход траектории из максимальных сфер, целиком лежащих внутри области, причем центром очередной сферы является предыдущая точка выхода.

При некоторых предположениях трудоемкость такого алгоритма определяется величиной $c |\ln \varepsilon| / \varepsilon^2$, т.е. асимптотически существенно меньше трудоемкости алгоритма, основанного на кусочно-линейной аппроксимации винеровского процесса. Из сказанного ясно, что вероятностное решение некоторых краевых задач можно связать с цепью Маркова, которую мы будем называть *"блужданием по сферам"*

(иначе ее называют также *"сферическим процессом"*

). На первый взгляд кажется, что вероятностное решение краевых задач для уравнения эллиптического типа нельзя построить, пользуясь только *"блужданием по сферам"* так как вероятностное представление решения зависит от поведения винеровской траектории внутри сфер. Однако это все-таки оказалось возможным благодаря использованию *"частичного осреднения"* и специальных интегральных уравнений второго рода. Поэтому рассматривается непосредственно процесс *"блуждания по сферам"* который значительно проще винеровского. [12], [13], [14], [17], [18],

[85], [86], [95].

2.2.1 Определение и простейшие свойства "блуждания по сферам"

Введем следующие обозначения:

Ω' – замыкание области Ω ;

$d(P) = \text{dist}(P, \partial\Omega)$ – расстояние от точки P до границы $\partial\Omega$ области Ω ;

$\partial\Omega_\varepsilon - \varepsilon$ – окрестность границы $\partial\Omega$; $\partial\Omega_\varepsilon = P \in \Omega'; d(P) < \varepsilon$;

$S(P) = Q \in \Omega' : |Q - P| = d(P)$ – максимальная из сфер с центром в точке P , целиком лежащих в Ω' .

В процессе "блуждания по сферам" очередная точка P_{k+1} выбирается равномерно по поверхности сферы $S(P_k)$; процесс обрывается, если точка попадает в $\partial\Omega_\varepsilon$.

Обозначим через $s(P, \varepsilon)$ – поверхность той части сферы $S(P)$, которая принадлежит множеству $\partial\Omega_\varepsilon$. Проведем сферу S_ε радиуса ε с центром в точке Q касания границы $\partial\Omega$ сферой $S(P)$. Тогда площадь части сферы $S(P)$, целиком лежащей внутри S_ε , равна $\pi\varepsilon^2$. Отсюда получаем следующую оценку снизу для вероятности попадания очередной точки в $\partial\Omega_\varepsilon$:

$$\frac{s(P, \varepsilon)}{4\pi d^2(P)} \geq \frac{\pi\varepsilon^2}{4\pi d^2(P)} \geq \frac{\varepsilon^2}{4d_{max}^2} = \nu(\varepsilon), \quad (2.3)$$

из точки P_0); $p(r, r') = \delta_r(r')$ – плотность перехода из r в r' , представляющая собой обобщенную трехмерную плотность равномерного распределения вероятностей на сфере $S(r)$; $p(r)$ – вероятность обрыва цепи, определяемая выражением:

$$p(r) = \begin{cases} 0, & r \in \Gamma, \\ 1, & r \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Как уже было указано, эта цепь называется "блужданием по сферам". Ее можно, очевидно, записать следующим образом:

$P_n = P_{n-1} + \vec{\omega}_n d(P_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, где $\vec{\omega}_n$ – последовательность независимых изотропных векторов единичной длины. Нетрудно заметить, что вероятность $P(r)$ обрыва цепи после очередного перехода равна вероятности непосредственного попадания из точки r в $\partial\Omega_\varepsilon$ и удовлетворяет неравенству $p(r) \geq \nu(\varepsilon)$. Отсюда находим, что среднее число переходов $q(P_0, \varepsilon)$, определяющее среднее время расчетов на ЭВМ, не превосходит $\nu^{-1}(\varepsilon)$.

Известно, что траектория "блуждания по сферам" с вероятностью 1 сходится к границе области. Следовательно, для получения более точной оценки $q(P_0, \varepsilon)$ можно использовать оценки плотности $f(r)$ распределения среднего числа центров сфер $S(P_k)$ вблизи границы. Обозначим через x расстояние до границы. Соображения подобия показывают, что плотность $f(x)$ распределения среднего числа центров сфер по x с точностью до постоянного множителя должна быть близкой к x^{-1} . Отсюда вытекает соотношение $q(P_0, \varepsilon) \leq c |\ln \varepsilon|$, которому мы придадим более точный смысл на основе теории восстановления, изучающей свойства последовательностей сумм независимых случайных величин.

2.2.2 Среднее число шагов "блуждания по сферам" до попадания

в ε – окрестность плоскости.

Пусть D – полупространство, ограниченное плоскостью Γ . Обозначим $d_n = d(P_n)$, где $\{P_n\}$ – цепь "блуждания по сферам" начинающаяся в точке $P = P_0$. Величину $\ln d_n$ можно представить следующим образом:

$$\ln d_n = \ln \left(d_0 \prod_{k=1}^n \frac{d_k}{d_{k-1}} \right) = \ln d_0 + \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{d_k}{d_{k-1}} \right). \quad (2.4)$$

Для плоской границы величины $\ln(d_k/d_{k-1})$, Очевидно, независимы и одинаково распределены; например, в трехмерном случае

$$d_k = d_{k-1} \cdot 2\alpha_k, \quad (2.5)$$

где α_k – независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $(0,1)$. Формула (2.5) следует из того, что проекция конечной точки изотропного единичного вектора на фиксированную ось в трехмерном случае распределена равномерно в соответствующем интервале.

Требуемые нами результаты теории восстановления содержатся в следующих утверждениях.

Лемма 2.1 . Пусть η_k – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $\mu < 0$, и

$$N_y = \min \left\{ n : \sum_{k=1}^n \eta_k < y \right\}, y < 0.$$

Тогда справедливо следующее асимптотическое соотношение:

$$MN_y = \frac{y}{\mu} + O(|y|) \text{ при } y \rightarrow -\infty \quad (2.6)$$

Обозначим через $H(y)$ среднее число значений n , для которых выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n \eta_k > y$. Принято называть $H(y)$ функцией восстановления.

Лемма 2.2 . Пусть $\eta_k \leq a < +\infty$, $\mu = M\eta_k < 0$ и $M \exp(c\eta_k) < +\infty$

для некоторого $c > 0$. Тогда при $y < 0$ производная $H(y)$ существует и

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} H'(y) = |\mu|^{-1}.$$

Заметим, что функцию $H'(y)$ обычно называют плотностью восстановления.

Далее определяются математические ожидания случайных величин $\eta_k^{(m)} = \ln(d_{k+1}/d_k)$ для различного числа измерений m и их асимптотика при $m \rightarrow \infty$. Будет проверено также выполнение условий леммы (2.2) для величин $\eta_k^{(m)}$.

Лемма 2.3 . Пусть D – m -мерное полупространство, ограниченное $(m - 1)$ – мерной гиперплоскостью. Тогда

$$M(\eta_k^{(m)}) = M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m\right) = \ln 2 + \psi\left(\frac{m-1}{2}\right) - \psi(m-1) < 0 \quad (2.7)$$

где $(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}$, $z > 0$; $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

В частности,

$$\begin{aligned} M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m = 2\right) &= -\ln 2, \quad M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m = 3\right) = \ln 2 - 1, \\ M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle|_{m \geq 3}^{m-\text{нечетн.}}\right) &= \ln 2 - \sum_{j=\frac{m-1}{2}}^{m-2} \frac{1}{j}, \\ M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle|_{m \geq 4}^{m-\text{нечетн.}}\right) &= -\ln 2 + \sum_{j=\frac{m}{2}}^{m-2} \frac{1}{j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

4.04.068.04.0 32.018.028.0 32.018.0 32.018.0 22.018.0 32.018.010.0-11 22.028

Значит,

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m\right) = \frac{\int_0^\pi \ln(1 - \cos \theta) \sin^{m-2} \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin^{m-2} \theta d\theta}. \quad (2.9)$$

Эта величина отрицательна, так как

$$\int_0^\pi \ln(1 - \cos \theta) \sin^{m-2} \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln(1 - \cos^2 \theta) \sin^{m-2} \theta d\theta < 0.$$

Сделаем в верхнем интеграле выражения (2.9) преобразования

$$1 - \cos \theta = 2[\sin(\theta/2)]^2, \quad \sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

и замену переменной $\sin(\theta/2) = x$, находим

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m\right) = \ln 2 + \frac{2^m \int_0^1 x^{m-2} (1-x^2)^{\frac{m-3}{2}} \ln x dx}{\int_0^\pi \sin^{m-2} \theta d\theta}.$$

Известно, что

$$\int_0^L x^{\mu-1} (1-x^2)^{\nu-1} \ln x dx = \frac{1}{r^2} B\left(\frac{\mu}{r}, \nu\right) \left[\psi\left(\frac{\mu}{r}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{r} + \nu\right) \right],$$

$$\int_0^\pi \sin^{\mu-1} x dx = 2^{\mu-1} B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right), \quad \mu - \text{натуральное.}$$

Используя эти выражения, с учетом равенств $\frac{\mu}{2} = \nu = \frac{\mu}{r} = \frac{m-1}{2}$, сразу получаем (2.7). Окончательное выражение для нечетного m следует из соотношения

$$(z+n) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n-1} + \psi(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

а для четного m нужно дополнительно использовать равенство

$$(2) = \frac{1}{2} \left[\psi + \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \ln 2 \quad \text{при } 2z = m-1.$$

Лемма 2.4 . *Справедливо следующее асимптотическое равенство*

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m\right) = -\frac{1}{2m} + O\left(\frac{1}{m}\right) \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Доказательство. Известно, что

$$(z) = \ln z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} M\left(\ln \frac{d_{k-1}}{d_k} | m+1\right) &= \ln 2 + \psi\left(\frac{m}{2}\right) - \psi(m) = \\ &= \ln 2 + \ln m - \ln 2 - \frac{1}{m} - \ln m + \frac{1}{2m} + O(m) = -\frac{1}{2m} + O(m). \end{aligned}$$

Очевидно, что последнее соотношение эквивалентно утверждению леммы.

Лемма 2.5 . Если $c < \frac{1}{2}$, то $M \exp(-c\eta_k^{(m)}) < +\infty$, $\forall m$. Доказательство

следует из соотношения:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin^{m-2} \theta \cdot \exp[-c \ln(1 - \cos \theta)] d\theta = \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2} \theta d\theta}{(-\cos \theta)^c} \leq \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 - \cos \theta)^c} < +\infty, \quad \forall c < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Теперь можно перейти к изучению свойств среднего числа переходов в цепи "блуждания по сферам".

Теорема 2.1 . Среднее число переходов, предшествующих попаданию в ε – окрестность плоской границы, для m –мерного пространства выражается формулой

$$q(P_0, \varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{M\eta_k^{(m)}} + O(|\ln \varepsilon|) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

При увеличении числа измерений среднее число переходов асимптотически растет, как $2m$.

Доказательство. Соотношение (2.11) сразу следует из (2.6) и леммы

(2.1), так как $d_n < \varepsilon$ эквивалентно $\ln d_n < \ln \varepsilon$ и $\mu = M\eta_k^{(m)} < 0$.

Второе утверждение является следствием леммы 2.4.

Заметим, что в случае трехмерного пространства имеем

$$q(P_0, \varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2 - 1} + O(|\ln \varepsilon|) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Теорема 2.2 *Плотность распределения среднего числа центров сфер S_n в случае плоской границы*

$$f(x) = \frac{1}{|M\eta_k^{(m)}|} \cdot \frac{1}{x} + O(x^{-1}), \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (2.13)$$

где x - расстояние до границы.

Доказательство. Из леммы 2.2 и 2.5 следует, что плотность $h(y)$ распределения среднего числа значений $\ln d_n$ при $y < 0$ существует и выражается формулой

$$h(y) = \frac{1}{|M\eta_k^{(m)}|} + O(1) \text{ при } y \rightarrow -\infty.$$

Отсюда получают (2.13), так как $f(x) = h(\ln x) \cdot x^{-1}$.

2.3 Уравнения Навье–Стокса. Постановка задачи

2.3.1 Основные пространства

Численное решение полных уравнений Навье–Стокса до сих пор является актуальной проблемой, так как оно связано со следующими основными

трудностями: во-первых, уравнение движения содержит нелинейный член; во-вторых, содержит "неудобное с точки зрения аппроксимации, уравнение (условие) несжимаемости и существует ряд других особенностей, связанных с давлением жидкости и числом Рейнольдса. Классические численные методы, связанные с полной дискретизацией по всем переменным не всегда дают, особенно в многомерном случае, желаемые результаты. Вопрос существования и единственности "сильного" решения полных уравнений Навье–Стокса до настоящего времени остался открытым. Тем не менее, необходимость решения этих уравнений какими-либо методами диктуется жизнью. Введем некоторые основные функциональные пространства. Символы $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, n)$ обозначают канонический базис евклидова пространства R^n , а символы $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, \dots обозначают точки этого пространства. Через D_i обозначим дифференциальный оператор $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $1 \leq i \leq n$, и если $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ – мультииндекс, то D^j – это дифференциальный оператор $D^j = D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}$, где $|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$. Если $j_i = 0$ для некоторого i то $D_i^{j_i}$ – тождественный оператор; в частности, если $|j| = 0$, то D^j – тождественный оператор.

Область Ω . Через $\partial\Omega$ обозначим границу области Ω , и пусть Ω расположено локально по одну сторону $\partial\Omega$. Граница Ω локально–липшицева, если $\partial\Omega$ в окрестности любой своей точки \vec{x} допускает представление в виде гиперповерхности $y_n = \vec{\alpha}(y_1, \dots, y_n)$, где $\vec{\alpha}$ удовлетворяет условию Липшица, а y_1, \dots, y_n – координаты в R^n в некотором ортогональном базисе, который может отличаться от канонического базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Пусть Ω – открытая ограниченная липшицева область в R^n .

Пространства. Через $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, (соответственно $L_\infty(\Omega)$) обозначим пространство определенных на Ω вещественных функций, абсолютно интегрируемых с p -й степенью (соответственно существенно ограниченных) по лебеговой мере $d\vec{x} = dx_1, dx_2 \dots dx_n$. Это пространство с нормой

$$\|\vec{u}\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\vec{u}(\vec{x})|^p d\vec{x} \right)^{1/p} \quad (2.14)$$

соответственно

$$\|\vec{u}\|_{L_\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{\Omega} |\vec{u}(\vec{x})|, \quad (2.15)$$

является банаховым пространством. При $p = 2$ получаем гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})d\vec{x}. \quad (2.16)$$

$W^{m,p}(\Omega)$ – это пространство функций из $L_p(\Omega)$, все частные производные которых до порядка m включительно, принадлежат $L_p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$ – пространство Соболева (m – целое, $1 \leq p \leq +\infty$). Это банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|j| \leq m} \|D^j u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \quad (2.17)$$

При $p = 2$ пространство $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ представляет собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$((\vec{u}, \vec{v}))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|f| \leq m} (D^f \vec{u}, D^f \vec{v}). \quad (2.18)$$

Пусть $E(\Omega)$ (соответственно $E(\bar{\Omega})$) обозначает пространство функций класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω (соответственно $\bar{\Omega}$). Замыкание $E(\Omega)$ в $W^{m,p}(\Omega)$ обозначим через $W_0^{m,p}(\Omega)$ (через $H_0^m(\Omega)$ при $p = 2$). Пространства $E(\Omega)$ и $E(\bar{\Omega})$ не являются нормированными. Если компоненты n -мерной вектор-функции принадлежат одному из определенных выше пространств, то будем использовать обозначения $L_p(\Omega) = \{L_p(\Omega)\}^n$, $W^{m,p}(\Omega) = \{W^{m,p}(\Omega)\}^n$, $H^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^n$, $E(\Omega) = \{E(\Omega)\}^n$. Предполагается, что эти произведения пространств, кроме $E(\Omega)$ снабжены обычной нормой произведения или какой-нибудь эквивалентной нормой.

Пространство $H_0^1(\Omega)$ также является гильбертовым пространством с ассоциированным скалярным произведением

$$((\vec{u}, \vec{v})) = \sum_{i=1}^n (D_i \vec{u}, D_i \vec{v}). \quad (2.19)$$

Пусть \wp – следующее пространство (без топологии):

$$\wp = \{\vec{u} \in E(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}. \quad (2.20)$$

Замыкание \wp в $L_2(\Omega)$ и в $H_0^1(\Omega)$ дает два основных пространства; обозначим их через H и V .

Теорема 2.3 (о плотности.) Пусть $G(\Omega)$ – вспомогательное пространство

$$G(\Omega) = \{\vec{u} \in L_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} \in L_2(\Omega)\}$$

и в нем определено скалярное произведение

$$((\vec{u}, \vec{v}))_{G(\Omega)} = (\vec{u}, \vec{v}) + (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v}),$$

Для вектор-функции $\vec{u} \in G(\Omega)$ можно определить значение на $\partial\Omega$ ее нормальной компоненты $\vec{u} \cdot \vec{n}$ (\vec{n} – единичный вектор нормали к границе). Приведем теорему о следе.

Теорема 2.4 (о следе.) Пусть Ω – открытая ограниченная область

класса C^2 . Тогда существует непрерывный линейный оператор $\gamma_{\vec{n}} \in$

$V(G(\Omega),$

$H^{-1/2}(\partial\Omega))$, такой, что $\gamma_{\vec{n}}\vec{u} =$ сужению $\vec{u} \cdot \vec{n}$ на $\partial\Omega$ для каждого $\vec{u} \in$

$E(\bar{\Omega})$. Для всех $\vec{u} \in G(\Omega)$ и $w \in H^1(\Omega)$ верна следующая обобщенная

формула Стокса:

$$(\vec{u}, \operatorname{grad} w) + (\operatorname{div} \vec{u} w) = (\gamma_{\vec{n}}\vec{u}, \gamma_0 w).$$

Доказательство теоремы 2.4 можно найти в книге Р. Темам [6]. Отметим, что здесь через γ_0 обозначен непрерывный линейный оператор из $V(H^1(\Omega), L_2(\partial\Omega))$ (оператор следа), такой что $\gamma_0 w =$ сужению w на $\partial\Omega$ для каждой функции $w \in H^1(\Omega)$, дважды непрерывно дифференцируемой в $\bar{\Omega}$. Пространство $H_0^1(\Omega)$ совпадает с ядром γ_0 . Образ $\gamma_0(H^1(\Omega))$ оператора следа является плотным подпространством в $L_2(\partial\Omega)$ и обозначим его через $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Пространство $H^{1/2}(\partial\Omega)$ снабжено нормой, индуцированной из $H^1(\Omega)$ с помощью γ_0 . Через $H^{-1/2}$

$(\partial\Omega)$ обозначим пространство, сопряженное к $H^{1/2}(\partial\Omega)$; $L_2(\partial\Omega)$ непрерывно вложено в $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Свойства основных пространств H и V .

Вспомним введенные нами обозначения:

$$\varphi = \{\vec{u} \in E(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0\},$$

$$H - \text{замыкание } \varphi \text{ в } L_2(\Omega), \quad (2.21)$$

$$V - \text{замыкание } \varphi \text{ в } H_0^1(\Omega), \quad (2.22)$$

Пусть Ω – открытая область в R^n и p – некоторое распределение на Ω , $p \in E^1(\Omega)$. Тогда для каждого $\vec{v} \in \varphi$ имеем

$$\langle \operatorname{grad} p, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle D_i p, \nu_i \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle p, D_i \nu_i \rangle = - \langle p, \operatorname{div} \vec{v} \rangle = 0$$

Справедливо и обратное утверждение. (см Р. Темам [6]).

Пространство H .

Теорема 2.5 Пусть Ω – липшицева открытая ограниченная область в R^n . Тогда

$$H^\perp = \{\vec{u} \in L_2(\Omega) : \vec{u} = \operatorname{grad} p, p \in H^1(\Omega)\}, \quad (2.23)$$

$$H = \{\vec{u} \in L_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0, \gamma_n \vec{u} = 0\}, \quad (2.24)$$

где H^\perp – ортогональное дополнение к H в $L_2(\Omega)$.

Пространство V .

Теорема 2.6 Пусть Ω – открытая ограниченная липшицева область.

Тогда

$$V = \{\vec{u} \in H_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}. \quad (2.25)$$

Пространство \tilde{V} .

$$\tilde{V} - \text{замыкание в } H_0^1(\Omega) \cap L_n(\Omega). \quad (2.26)$$

$H_0^1(\Omega) \cap L_n(\Omega)$ и \tilde{V} наделяются нормой $\|\vec{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\vec{u}\|_{L_n(\Omega)}$. В общем случае \tilde{V} – подпространство в V , отличное от V , но $\tilde{V} = V$ для $n = 2, 3, 4$ (в случае, когда область ограничена).

2.3.2 Уравнения Стокса

Уравнения Стокса – это линейаризованная форма полных уравнений Навье–Стокса. Пусть Ω – открытая ограниченная область в R^n с границей $\partial\Omega$ и $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ – заданная вектор–функция на Ω .

Задача 2.1 *Найти вектор–функцию $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, и скалярную функцию p , представляющие скорость и давление жидкости, которые определены в Ω и удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям*

$$-\nu\Delta\vec{u} + \text{grad } p = \vec{f} \text{ в } \Omega \quad (\nu > 0), \quad (2.27)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.28)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (2.29)$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости.

Вариационная формулировка задачи 3.1.

Если \vec{f} , \vec{u} и p гладкие функции, удовлетворяющие условиям (3.1) – (3.3), то умножая уравнение (3.1) на функцию $\vec{v} \in \wp$, мы получаем $(-\nu\Delta\vec{u} + \text{grad } p, \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v})$; при интегрировании по частям член $(-\nu\Delta\vec{u}, \vec{v})$ дает

$$\sum_{i=1}^n (\text{grad } u, \text{grad } v_i) = ((\vec{u}, \vec{v})),$$

а член $(\text{grad } p, \vec{v})$ дает $-(p, \text{div } \vec{u}) = 0$; в результате получим

$$(\forall v \in \wp)[\nu((\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{f}, \vec{v})]. \quad (2.30)$$

Так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от \vec{v} (в топологии $H_0^1(\Omega)$), то оно по непрерывности верно и для каждого $\vec{v} \in V$ – замыкания \wp в $H_0^1(\Omega)$. Если Ω – область класса C^∞ , то удовлетворяющая условию (3.3) гладкая функция \vec{u} принадлежит $H_0^1(\Omega)$ и поэтому, в силу (3.2) и теоремы 2.6, $u \in V$. Таким образом мы получили, вектор \vec{u} принадлежит V и он удовлетворяет равенству

$$(\forall \vec{v} \in V)[\nu((\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{f}, \vec{v})]. \quad (2.31)$$

Верно и обратное утверждение, то есть, если \vec{u} удовлетворяет (3.5), тогда \vec{u} удовлетворяет (3.1) – (3.3) в некотором смысле. Задача "найти функцию $u \in V$, удовлетворяющую условию (3.5)" называется вариационной формулировкой задачи 3.1. В работе Р. Темам [6] доказано существование и единственность решения задачи (3.5).

2.3.3 Стационарные уравнения Навье–Стокса

Пусть Ω – липшицева ограниченная открытая область в R^n с границей $\partial\Omega$ и $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ – заданная вектор–функция.

Задача 2.2 *Найти вектор–функцию $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и скалярную функцию p , представляющие скорость и давление жидкости, которые определены в Ω и удовлетворяющие следующим уравнениям и граничным условиям*

$$-\nu \Delta \vec{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \vec{u} + \text{grad } p = \vec{f} \text{ в } \Omega, \quad (2.32)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.33)$$

$$\vec{u} = 0 \text{ на } \Omega. \quad (2.34)$$

Вариационная формулировка задачи 3.4.

Так же, как в задаче 3.1, если \vec{f}, \vec{u}, p – гладкие функции, удовлетворяющие (3.23) – (3.25), то $\vec{u} \in V$ и для каждого $\nu \in \wp$

$$\nu((\vec{u}, \vec{v})) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v}), \quad (2.35)$$

$$\text{где } b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i \nu_j) w_j dx. \quad (2.36)$$

Для ограниченной области Ω и произвольного n сопоставим задаче (3.23) – (3.25) задачу: найти $\vec{u} \in V$ такой, что

$$(\forall \vec{v} \in \tilde{V}) [\nu((\vec{u}, \vec{v})) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v})]. \quad (2.37)$$

Из (3.23) и (2.26) следует, что, если \vec{u} и p – гладкие функции, удовлетворяющие (3.23) – (3.25), то \vec{u} удовлетворяет (3.28). Обратно, если $\vec{u} \in V$ удовлетворяет (3.28), то

$$(\forall \nu \in \wp) [\langle -\nu \Delta \vec{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \vec{u} - \vec{f}, \vec{u} \rangle = 0], \quad (2.38)$$

$$\Delta \vec{u} \in H^{-1}(\Omega), \quad \vec{f} \in L_2(\Omega),$$

$$u_i D_i \vec{u} \in L^{n'}(\Omega) \quad (1/n' = 1 - 1/n).$$

Задача (3.28) является вариационной формулировкой задачи (3.23) – (3.25).

Теорема 2.7 Пусть Ω – ограниченная область в R^n и \vec{f} – заданный элемент из $H^{-1}(\Omega)$. Тогда задача (3.28) имеет по крайней мере одно решение $\vec{u} \in V$ и существует распределение $p \in L_{loc}(\Omega)$ такое, что уравнения (3.23) – (3.25) удовлетворяются. [6].

2.3.4 Полные уравнения Навье–Стокса

Пусть Ω – ограниченная липшицева область в R^n , и пусть $T > 0$ фиксировано. Обозначим через Q цилиндр $\Omega \times (0, T)$. В классической формулировке

начально–краевая задача для полных уравнений Навье–Стокса выглядит следующим образом: найти вектор–функцию $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow R^n$ и скалярную функцию $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow R$ такие, что

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \vec{u} + \text{grad } p = \vec{f} \text{ в } Q, \quad (2.39)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \text{ в } Q, \quad (2.40)$$

$$\vec{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.41)$$

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) \text{ в } \Omega. \quad (2.42)$$

Заданные функции \vec{f} и $\vec{u}_0(x)$ определены на $\Omega \times [0, T]$ и Ω соответственно. Пусть b – непрерывная трилинейная форма на V , то есть

$$b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx. \quad (2.43)$$

Если $\vec{u} \in V$, то

$$(\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) [b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0] \quad (2.44)$$

Для $\vec{u}, \vec{v} \in V$ обозначим через $B(\vec{u}, \vec{v})$ элемент из V' , определяемый равенством

$$(\forall \vec{u} \in V) [\langle B(\vec{u}, \vec{u}), \vec{w} \rangle = b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})] \quad (2.45)$$

и положим

$$(\forall \vec{u} \in V) [B(\vec{u}, \vec{u}) = B(u) \in V']. \quad (2.46)$$

Если \vec{u}, p – классические решения задачи (3.39) – (3.42), например, $\vec{u} \in C^2(\bar{Q})$, то очевидно $\vec{u} \in L_2(0, T; V)$ и для $\vec{v} \in \wp$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} (\vec{u}, \vec{v}) + \nu ((\vec{u}, \vec{v})) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle. \quad (2.47)$$

По непрерывности равенство (3.47) будет выполняться для каждого $\vec{v} \in V$. Отсюда следует слабая формулировка задачи (3.39) – (3.42):

Задача 2.3 Для заданных \vec{u}_0 и \vec{f} таких, что

$$\vec{f} \in L_2(0, T; V'), \quad \vec{u}_0 \in H \quad (2.48)$$

найти функцию \vec{u} , удовлетворяющую условиям

$$(\forall \vec{v} \in V) \left[\frac{d}{dt}(\vec{u}, \vec{v}) + \nu((\vec{u}, \vec{v})) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \right]. \quad (2.49)$$

$$\vec{u} \in L_2(0, T; V), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \quad (2.50)$$

Приведем другую формулировку задачи 3.6.

Задача 2.4 Для заданных \vec{f} и \vec{u}_0 , удовлетворяющих (3.48) найти функцию \vec{u} , удовлетворяющую условиям

$$\vec{u} \in L_2(0, T, V), \quad \vec{u}' \in L_1(0, T; V'), \quad (2.51)$$

$$\vec{u} + \nu A\vec{u} + B\vec{u} = \vec{f} \text{ на } (0, T), \quad (2.52)$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0. \quad (2.53)$$

Корректность Задачи 3.6 следует из следующих свойств пространств V, H, V' и оператора A . Пространство V вложено в H и плотно в нем, причем вложение непрерывно, H' и V' обозначают пространства, сопряженные к H и V . Для этих пространств справедливы включения:

$$V \subseteq H \equiv H' \subseteq V',$$

где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны. Скалярное произведение в H элементов $\vec{f} \in H$ и $\vec{u} \in V$ совпадают со значением функционала \vec{f} на элементе \vec{u} в смысле двойственности между V' и V :

$$(\forall \vec{f} \in H)(\forall \vec{u} \in V)[\langle \vec{f}, \vec{u} \rangle = (\vec{f}, \vec{u})]$$

Для каждого \vec{u} из V форма

$$\vec{v} \in V \rightarrow ((\vec{u}, \vec{v})) \in R$$

линейна и непрерывна на V ; следовательно существует элемент из V' , который обозначим через $A\vec{u}$ такой, что

$$(\forall \vec{v} \in V)[\langle A\vec{u}, \vec{v} \rangle = ((\vec{u}, \vec{v}))].$$

Оператор A непрерывный линейный оператор из V в V' . Задача 3.6 и Задача 3.7 являются эквивалентными.

Теорема 2.8 Пусть $n \leq 4$, и пусть заданы \vec{f}, \vec{u}_0 , удовлетворяющие

(3.48). Тогда существует по крайней мере одна функция \vec{u} , удовлетворяющая

(3.51) – (3.53). При этом $\vec{u} \in L_\infty(0, T; H)$ и слабо непрерывна как

функция из $[0, T]$ в H .

Доказательство теоремы приводится в работе [6]. Мы здесь отметим, что у Задачи 3.7 существует единственное решение, если $n = 2$ и по крайней мере одно решение, если $n = 3$.

2.3.5 Стационарные линеаризованные уравнения слабо сжимаемой жидкости

Рассмотрим задачу

$$-\nu \Delta \vec{u} - \varepsilon^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = f \quad \text{в } \Omega \quad (2.54)$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.55)$$

где $\varepsilon > 0$ – малая величина. Уравнения (3.91) – (3.92) называются линеаризованными уравнениями слабо сжимаемой жидкости или стационарными уравнениями Ламе из теории упругости.

Задача (3.91) – (3.92) имеет единственное решение \vec{u} для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ и \vec{u} сходится к решению задачи Стокса при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим через \vec{v} решение задачи Стокса.

Теорема 2.9 Пусть Ω – ограниченная липшицева область в R_n . Для

всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует единственный элемент $\vec{u} \in W_2^{0,1}$

(Ω), который удовлетворяет (3.91). Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\vec{u} \rightarrow \vec{v}$ в норме

$W_2^{0,1}(\Omega)$, $-\varepsilon^{-i} \operatorname{div} \vec{u} \rightarrow p$ в норме $L_2(\Omega)$, где \vec{v} и p решение задачи

$$-\nu \Delta \vec{v} + \operatorname{grad} p = f \quad \text{в } \Omega, \quad \nu > 0, \quad (2.56)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.57)$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.58)$$

кроме того

$$\int_{\Omega} p(x) dx = 0. \quad (2.59)$$

Известно много эффективных алгоритмов для решения уравнений Стокса и дискретизация уравнений (3.91) – (3.92) приводит при очень малых ε к плохо обусловленной матрице. Поэтому разумно вычислить \vec{u} для малых ε , используя уравнения Стокса. Для этого используют асимптотическое разложение для \vec{u} . Для ясности переобозначим решение задачи Стокса, удовлетворяющее (3.96), через \vec{v}^0, p^0 (вместо \vec{v}, p). Известно, что \vec{u} имеет асимптотическое разложение по ε .

$$\vec{u} = \vec{v}^0 + \varepsilon \vec{v}^1 + \varepsilon^2 \vec{v}^2 + \dots + \varepsilon^N \vec{v}^N + \dots, \quad (2.60)$$

где все $\vec{v}^i \in W_2^{0,1}(\Omega)$, (i – номер итерации для функции \vec{v}).

Функции \vec{v}^i и вспомогательные функции p^i определяются рекуррентно следующим образом:

$$\vec{v}^0 \quad \text{и} \quad p^0 \quad (2.61)$$

уже известно (решение задачи Стокса), если \vec{v}^{k-1}, p^{k-1} (k – номер итерации, $k \geq 1$) известны, то \vec{v}^k, p^k определяются как решение неоднородной задачи Стокса

$$\vec{v}^k \in W_2^{0,1}(\Omega), \quad p^k \in L_2(\Omega), \quad (2.62)$$

$$-\nu \Delta \vec{v}^k + \operatorname{grad} p^k = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.63)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^k = -p^{k-1} \quad \text{в } \Omega, \quad (2.64)$$

$$\int_{\Omega} p^k(x) dx = 0. \quad (2.65)$$

Существование и единственность \vec{v}^k, p^k следует из теоремы о существовании и единственности неоднородной задачи Стокса [6].

Условие (3.102) гарантирует единственность p^k , которое в противном случае было бы единственно лишь с точностью до аддитивной постоянной; оно гарантирует также условие согласования, необходимое для $(k+1)$ -го шага:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}^{k+1}(x) dx = \int_{\Omega} \vec{v}^{k+1} \cdot \vec{n} d(\partial\Omega) = 0 = \int_{\Omega} p^k(x) dx. \quad (2.66)$$

Обозначим через $\vec{v}_{\varepsilon}^N = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \vec{v}^k$, $p_{\varepsilon}^N = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k p^k$.

Теорема 2.10 Пусть Ω – ограниченная область класса C_{∞} в R_n . Тогда для каждого $k \geq 1$ существуют однозначно определенные функции \vec{v}^k, p^k , удовлетворяющие соотношениям (3.99) – (3.102). (Для $k = 0$ задаются (3.98)). Для каждого $N \geq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u} - \vec{v}_{\varepsilon}^N}{\varepsilon^N} &\rightarrow 0 \text{ в норме } W_2^0(\Omega) \\ \frac{-\varepsilon^{-1} \operatorname{div} \vec{u} - p_{\varepsilon}^N}{\varepsilon^N} &\rightarrow 0 \text{ в норме } L_2(\Omega) \end{aligned}$$

Приведенные теоремы доказываются в [6]. Более того, нетрудно доказать дискретный вариант теоремы 3.9.

2.3.6 Дискретизация линеаризованных уравнений Навье – Стокса

по временной переменной

Пусть Ω – ограниченная область в R^3 с границей $\partial\Omega$ и пусть $T > 0$ фиксировано. Обозначим через Q цилиндр $\Omega \times (0, T)$, границу цилиндра

$\partial\Omega \times [0, T]$, обозначим через ∂Q . Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \text{grad } p = \vec{f}, \quad \text{в } Q \quad (2.67)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0, \quad \text{в } Q \quad (2.68)$$

$$\vec{u} = 0, \quad \text{на } \partial Q \quad (2.69)$$

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x), \quad \text{в } \Omega \quad (2.70)$$

где $\vec{u}(x, t)$ – вектор–функция с компонентами $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow R^3$; $p(x, t)$ – скалярная функция; $\Omega \times [0, T] \rightarrow R$, ν – кинематический коэффициент вязкости, $\nu > 0$. Заданные вектор–функции $\vec{f}(x, t)$ и $\vec{u}_0(x)$ определены на $\Omega \times [0, T]$ и Ω соответственно. Вопросы существования и единственности решения задачи (3.120), (3.123) рассмотрены в [6], [7], [8], [9].

3

Решение уравнений Навье–Стокса и граничных интегральных уравнений

3.1 Уравнения Стокса

Уравнения Стокса – это линейризованная форма полных уравнений Навье–Стокса. Пусть Ω – открытая ограниченная область в R^n с границей $\partial\Omega$ и $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ – заданная вектор–функция на Ω .

Задача 3.1 *Найти вектор–функцию $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, и скалярную функцию p , представляющие скорость и давление жидкости, которые определены*

в Ω и удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям

$$-\nu \Delta \vec{u} + \text{grad } p = \vec{f} \text{ в } \Omega \quad (\nu > 0), \quad (3.1)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (3.2)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (3.3)$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости.

Вариационная формулировка задачи 3.1.

Если \vec{f} , \vec{u} и p гладкие функции, удовлетворяющие условиям (3.1) – (3.3), то умножая уравнение (3.1) на функцию $\vec{v} \in \wp$, мы получаем $(-\nu \Delta \vec{u} + \text{grad } p, \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v})$; при интегрировании по частям член $(-\nu \Delta \vec{u}, \vec{v})$ дает

$$\sum_{i=1}^n (\text{grad } u, \text{grad } v_i) = ((\vec{u}, \vec{v})),$$

а член $(\text{grad } p, \vec{v})$ дает $-(p, \text{div } \vec{u}) = 0$; в результате получим

$$(\forall v \in \wp) [\nu((\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{f}, \vec{v})]. \quad (3.4)$$

Так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от \vec{v} (в топологии $H_0^1(\Omega)$), то оно по непрерывности верно и для каждого $\vec{v} \in V$ – замыкания \wp в $H_0^1(\Omega)$. Если Ω – область класса C^∞ , то удовлетворяющая условию (3.3) гладкая функция \vec{u} принадлежит $H_0^1(\Omega)$ и поэтому, в силу (3.2) и теоремы 2.6, $u \in V$. Таким образом мы получили, вектор \vec{u} принадлежит V и он удовлетворяет равенству

$$(\forall \vec{v} \in V) [\nu((\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{f}, \vec{v})]. \quad (3.5)$$

Верно и обратное утверждение, то есть, если \vec{u} удовлетворяет (3.5), тогда \vec{u} удовлетворяет (3.1) – (3.3) в некотором смысле. Задача "найти функцию $u \in V$, удовлетворяющую условию (3.5)" называется вариационной формулировкой задачи 3.1. В работе Р. Темам [6] доказано существование и единственность решения задачи (3.5).

Численные алгоритмы.

Дискретизация уравнений Стокса, то есть дискретизация задачи (3.5) не решает полностью задачу численной аппроксимации этих уравнений;

для фактического вычисления решения нам мешает условие $\operatorname{div} u = 0$, входящее в определение пространства V . То есть при аппроксимации пространства V нам не всегда удастся определить базис в пространстве V_h , такой, что нахождение компонент \vec{u}_h свелось бы к линейной системе алгебраических уравнений. Поэтому для численного решения задачи (3.5) предлагаются классические алгоритмы оптимизации – алгоритмы Удзавы и (или) Эрроу-Гурвица. Реализация этих алгоритмов осуществляется методами Монте-Карло.

Алгоритм Удзавы.

Алгоритм начнем с произвольного элемента

$$p^0 \in L_2(\Omega) \quad (3.6)$$

Если p^m уже известно, то определим $\vec{u}^{m+1}, p^{m+1} (m \geq 0)$ соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega), \quad (\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) [\nu((\vec{u}^{m+1}, \vec{v})) - \\ - (p^m, \operatorname{div} \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v})], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} p^{m+1} \in L_2(\Omega), \quad (\forall q \in L_2(\Omega)) [(p^{m+1} - \\ - p^m, q) + \alpha(\operatorname{div} \vec{u}^{m+1}, q) = 0]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пока предположим, что α – некоторое фиксированное число.

Существование и единственность решения u^{m+1} задачи (3.7) является следствием проекционной теоремы. Результатом этой теоремы является:

Задача 3.2 \vec{u}^{m+1} есть решение задачи Дирихле

$$\vec{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega) \quad (3.9)$$

$$-\nu \Delta \vec{u}^{m+1} = \operatorname{grad} p^m + \vec{f} \in H^{-1}(\Omega), \quad (3.10)$$

где H^{-1} – пространство, сопряженное к $H^1(\Omega)$.

Если \vec{u}^{m+1} известен, то p^{m+1} явно задается формулой (3.8), или что то же самое

$$p^{m+1} = p^m - \alpha \cdot \operatorname{div} u^{m+1} \in L_2(\Omega). \quad (3.11)$$

Сходимость алгоритма.

Теорема 3.1 Если число α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 2\nu$, то \vec{u}^m сходится при $m \rightarrow \infty$ к \vec{u} в $H_0^1(\Omega)$, а p^{m+1} сходится к p слабо в

$$L_2(\Omega)/R = \left\{ p \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} p(x) dx = 0 \right\}.$$

Отметим, что, если на p наложено требование $\int_{\Omega} p(x) dx = 0$, то выбирая $p^0 \in L_2(\Omega)$ так, чтобы $\int_{\Omega} p^0(x) dx = 0$, мы имеем $\int_{\Omega} p^m(x) dx = 0$, $m \geq 1$, и последовательность p^m сходится к p слабо в пространстве $L_2(\Omega)$.

Алгоритм Эрроу–Гурвица.

Алгоритм начинается с произвольных элементов \vec{u}^0, p^0 :

$$\vec{u}^0 \in H_0^1(\Omega) \quad p^0 \in L_2(\Omega). \quad (3.12)$$

Если p^m и \vec{u}^m уже известны, то определим p^{m+1} и \vec{u}^{m+1} как решения задач

$$\begin{aligned} \vec{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega), \quad p^{m+1} \in L_2(\Omega), \\ (\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) [(\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m, \vec{v}) + \beta \nu ((\vec{u}^m, \vec{v})) - \\ - \beta (p^m, \operatorname{div} \vec{v}) = \beta (\vec{f}, \vec{v})] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$(\forall q \in L_2(\Omega)) [\gamma (p^{m+1} - p^m, q) + \beta (\operatorname{div} \vec{u}^{m+1}, q)] = 0 \quad (3.14)$$

Существование и единственность элемента $\vec{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющего (3.13) является следствием проекционной теоремы.

Задача 3.3 \vec{u}^{m+1} есть решение задачи Дирихле

$$-\Delta \vec{u}^m = -\Delta \vec{u}^m + \beta \cdot \nu \Delta \vec{u}^m + \beta \operatorname{grad} p^m + \beta \vec{f} \quad (3.15)$$

$$\vec{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega). \quad (3.16)$$

Тогда p^{m+1} явно задается формулой (3.14), которая эквивалентна следующей

$$p^{m+1} = p^m - \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \operatorname{div} \vec{u}^{m+1} \in L_2(\Omega). \quad (3.17)$$

Сходимость алгоритма.

Теорема 3.2 Если числа β и γ удовлетворяют условию

$$0 < \beta < \frac{2\gamma\nu}{\gamma\nu^2 + 1},$$

то \vec{u}^m сходится при $m \rightarrow \infty$ к \vec{u} в $H_0^1(\Omega)$ и p^m сходится к p слабо в $L_2(\Omega)/R$.

Здесь также выполнено условие

$$\int_{\Omega} p^m(x) dx = 0, \quad m \geq 1,$$

если $p^0 \in L_2(\Omega)$ выбрано так, чтобы $\int_{\Omega} p^0(x) dx = 0$.

Тогда последовательность p^m сходится слабо к p в пространстве $L_2(\Omega)$.

Алгоритмы метода Монте–Карло для решения задачи 3.2.

Рассмотрим задачу (3.9) – (3.10). Зададим произвольное $p^0(x)$ и вычислим $(1/\nu)(\text{grad } p^0(x) + \vec{f}(x)) \equiv \vec{f}_0(x)$. Для ясности выясним природу пространства $H_0^1(\Omega)$.

Гильбертово пространство $H_0^1(\Omega)$ есть подпространство пространства $H^1(\Omega)$, плотным множеством в котором C^∞ является совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций. Последнее – финитность $\vec{u}(x)$ в Ω – означает, что $\vec{u}(x)$ отлична от нуля лишь в какой-либо ограниченной подобласти Ω_1 области Ω на положительном расстоянии. Теперь для $m = 0$ получим следующую задачу Дирихле

$$\Delta \vec{u}^1(x) = -\vec{f}_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (3.18)$$

$$\vec{u}^1(x) \in H_0^1(\Omega). \quad (3.19)$$

Задачу (3.18) – (3.19) решаем, например, с помощью алгоритма "блуждания по сферам". Оценим производные от решения задачи (3.18) – (3.19) в точке x также методом Монте–Карло, то есть оценим $\vec{u}_\varepsilon^1(x)$ и $\partial u_{i\varepsilon}^1(x)/\partial x_i$. Далее определим

$$\text{div } \vec{u}_\varepsilon^1(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_{i\varepsilon}^1(x)}{\partial x_i}.$$

Оценим вторые производные от решения

$$\frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}^1(x)}{\partial x_i^2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{или} \quad \Delta \vec{u}_\varepsilon^1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_{i\varepsilon}^1(x)}{\partial x_i^2}.$$

Теперь мы можем с помощью формулы (3.11) определить

$$p_\varepsilon^1(x) = p^0(x) - \alpha \cdot \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon^1(x) \quad \text{в точке } x. \quad (3.20)$$

Приведем некоторые основные оценки решения задачи (3.18) – (3.19).

$$\xi_\varepsilon = \frac{d^2}{6} \cdot \vec{f}_0(r + \rho \vec{\omega}) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{d^2}{6} \vec{f}_0(r + \rho \cdot \vec{\omega}),$$

где N – случайный номер последнего состояния цепи Маркова, $d = d(\vec{r})$ – радиус случайной сферы, $\vec{\omega}$ – изотропный вектор длины 1 в R^n , $\rho = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – расстояние центров случайных сфер. Случайная величина ξ_ε является ε – смещенной оценкой для $\vec{u}^1(r)$.

Теорема 3.3 *Дисперсия случайной величины ξ равномерно ограничена*

по ε .

Теорема 3.3 доказывается также как аналогичная теорема из [13].

С помощью метода отбора Неймана моделируется цепь Маркова с плотностью

$$p_1(x, y) = \frac{p_2(\rho) + |\vec{b}(y)| \cos(\vec{b}(y), \rho) \int_{\rho}^{R_1} p_2(\rho_1) d\rho_1}{\sigma_n q_2(R_1) \rho^{n-1}}$$

или в сферической системе координат

$$p_1(\rho, \omega) = \frac{p_2(\rho) + |\vec{b}(x + \rho \vec{\omega})| \cos(\vec{b}(x + \rho \vec{\omega}), \vec{\omega}) \int_{\rho}^{R_1} p_2(\rho_1) d\rho_1}{\sigma_n q_2(R_1)},$$

где $\rho = |x - y|$, σ_n – площадь поверхности сферы радиуса 1 в R^n , $c_1 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq R(x) \leq c_2 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, где c_1, c_2 – некоторые положительные постоянные, $\vec{b}(y)$ – заданный вектор, $p_2(\rho)$ – плотность, являющаяся произвольной

суммируемой на некотором интервале $[0, R_2(x)]$ неотрицательной функцией, $q_2(x)$ – вероятность обрыва, которая стремится к нулю при $x \rightarrow \partial\Omega$, поэтому траектория цепи может иметь бесконечную длину.

Процесс моделирования.

1. Моделируется случайная величина t с плотностью $p_2(\rho)/q_2(R_1)$.
2. Методом отбора моделируется случайная величина η с плотностью

$$p_\rho(\omega) = 1 + \frac{|\vec{b}(x + \rho\omega)|}{p_2(\rho)} \cos(\vec{b}(x + \rho\vec{\omega}), \vec{\omega}) \int_\rho^{R_1} p_2(\rho_1) d\rho_1.$$

3. Случайный вектор с плотностью $p_1(x, y)$ вычисляется по формуле $\xi_\varepsilon = x + t \cdot \eta$.

Для последней случайной величины ξ_ε справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4 *Случайная величина ξ_ε является ε – смещенной оценкой для $\vec{u}^1(x)$, и дисперсия есть ограниченная функция параметра ε .*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству Теоремы 3.3. Решение задачи 3.3 оценивается так же, как решение задачи 3.2. В этом случае, чтобы определить правую часть задачи 3.3 при $m = 0$ для заданных \vec{u}^0 и p^0 из (3.12) вычислим (оценим методами Монте–Карло) $\Delta\vec{u}^0(x)$ и $\text{grad } p^0(x)$. Затем вычислим $\vec{f}_0(x) = -\Delta\vec{u}^0(x) + \beta \text{grad } p^0(x) + \beta \cdot \vec{f}(x)$. Далее, чтобы оценить решение задачи 3.3 $\vec{u}^1(x)$ в точке x и определить $p^1(x)$ из (3.17) повторяем все те процедуры построения оценок для решения задачи 3.2 и определения $p^1(x)$ из (3.20) с коэффициентом β/γ .

Чтобы осуществить переход к следующему шагу итерации, используя оценки первых и вторых производных от решения в точке x вычислим для потенциального течения

$$\text{grad } p_\varepsilon^1(x) = \text{grad } p^0(x) - \alpha_1 \Delta\vec{u}_\varepsilon(x).$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha$, если рассматривается задача 3.2 и $\alpha_1 = \beta/\gamma$, если рассматривается задача 3.3

Определяя правые части задач 3.2 и 3.3 и, используя оценки производных от решения в точке x для $m = k, k \geq 1$, продолжим итерационный

процесс. Итерационный процесс останавливается, если выполнены следующие условия для некоторого шага итерации k .

$$\|u_\varepsilon^k(x) - u_\varepsilon^{k-1}(x)\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon_1, \quad (3.21)$$

$$\|p_\varepsilon^k(x) - p_\varepsilon^{k-1}(x)\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon_1, \quad (3.22)$$

где ε_1 – заданное малое положительное число.

3.2 Стационарные уравнения Навье–Стокса

Пусть Ω – липшицева ограниченная открытая область в R^n с границей $\partial\Omega$ и $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ – заданная вектор-функция.

Задача 3.4 Найти вектор-функцию $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и скалярную функцию p , представляющие скорость и давление жидкости, которые определены в Ω и удовлетворяющие следующим уравнениям и граничным условиям

$$-\nu\Delta\vec{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \vec{u} + \text{grad } p = \vec{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (3.23)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.24)$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (3.25)$$

Вариационная формулировка задачи 3.4.

Так же, как в задаче 3.1, если \vec{f}, \vec{u}, p – гладкие функции, удовлетворяющие (3.23) – (3.25), то $\vec{u} \in V$ и для каждого $\vec{v} \in \wp$

$$\nu((\vec{u}, \vec{v})) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v}), \quad (3.26)$$

$$\text{где } b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx. \quad (3.27)$$

Для ограниченной области Ω и произвольного n сопоставим задаче (3.23) – (3.25) задачу: найти $\vec{u} \in V$ такой, что

$$(\forall \vec{v} \in \tilde{V})[\nu((\vec{u}, \vec{v})) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v})]. \quad (3.28)$$

Из (3.23) и (2.26) следует, что, если \vec{u} и p – гладкие функции, удовлетворяющие (3.23) – (3.25), то \vec{u} удовлетворяет (3.28). Обратно, если $\vec{u} \in V$ удовлетворяет (3.28), то

$$\begin{aligned} (\forall \nu \in \wp)[\langle -\nu \Delta \vec{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \vec{u} - \vec{f}, \vec{u} \rangle = 0], \quad (3.29) \\ \Delta \vec{u} \in H^{-1}(\Omega), \vec{f} \in L_2(\Omega), \\ u_i D_i \vec{u} \in L^{n'}(\Omega) \quad (1/n' = 1 - 1/n). \end{aligned}$$

Задача (3.28) является вариационной формулировкой задачи (3.23) – (3.25).

Теорема 3.5 Пусть Ω – ограниченная область в R^n и \vec{f} – заданный элемент из $H^{-1}(\Omega)$. Тогда задача (3.28) имеет по крайней мере одно решение $\vec{u} \in V$ и существует распределение $p \in L_{loc}(\Omega)$ такое, что уравнения (3.23) – (3.25) удовлетворяются. [6].

Численные алгоритмы. Алгоритм Эрроу–Гурвица.

Для того, чтобы аппроксимировать решения задачи (3.23) – (3.25) построим две последовательности элементов $\vec{u}^m \in H_0^1(\Omega)$, $p^m \in L_2(\Omega)$. Для аппроксимирующих уравнений условие $\operatorname{div} u = 0$ пропадает. Поэтому итерационный процесс осуществляется легко. Начнем алгоритм с произвольных элементов

$$\vec{u}_0 \in H_0^1(\Omega), \quad p^0 \in L_2(\Omega). \quad (3.30)$$

Если p^m, \vec{u}^m уже известны, то определим p^{m+1}, \vec{u}^{m+1} как решения задач

$$\begin{aligned} (\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega))[(\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m, \vec{v}) + \beta \nu((\vec{u}^m, \vec{v})) + \\ \beta \cdot \tilde{b}(\vec{u}^m, \vec{u}^{m+1}, \vec{v}) - \beta(p^m, \operatorname{div} \vec{v}) = \beta(\vec{f}, \vec{v})] \quad (3.31) \end{aligned}$$

$$(\forall q \in L_2(\Omega))[\gamma(p^{m+1} - p^m, q) + \beta(\operatorname{div} \vec{u}^{m+1}, q) = 0, \quad (3.32)$$

$$\vec{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega), \quad p^{m+1} \in L_2(\Omega). \quad (3.33)$$

Пока предположим, что β, γ – строго положительные числа. Существование и единственность $\vec{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющего (3.31), является следствием проекционной теоремы. Уравнение (3.31) – линейное вариационное уравнение, оно эквивалентно задаче Дирихле для уравнения эллиптического типа:

Задача 3.5

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{u}^{m+1} + \beta \sum_{i=1}^n u_i^m D_i \vec{u}^{m+1} + \left(\frac{\beta}{2}\right) (\operatorname{div} \vec{u}^m) \vec{u}^{m+1} = \\ = -\Delta \vec{u}^m + \beta \cdot \nu \Delta \vec{u}^m + \beta \cdot \operatorname{grad} p^m + \beta \cdot \vec{f}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\vec{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega).$$

Уравнение (3.32) эквивалентно равенству

$$p^{m+1} = p^m - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \operatorname{div} \vec{u}^{m+1} \in L_2(\Omega). \quad (3.35)$$

Из (3.34) находим \vec{u}^{m+1} , а p^{m+1} определяется из (3.35)

Сходимость алгоритма.

Теорема 3.6 Предположим, что $n \leq 4$,

$$\nu - \frac{2\tilde{c}}{\nu} \|f\|_{V'} - \frac{4\tilde{c}^2}{\nu^2} \|f\|_{V'}^2 \equiv \nu^* > 0, \quad 0 < \beta < \frac{\gamma \nu^*}{2(1 + \nu^2 \gamma)}.$$

Тогда при $m \rightarrow \infty$ $\vec{u}^m \rightarrow \vec{u}$ в норме $H_0^1(\Omega)$, $p^m \rightarrow p$ слабо в $L_2(\Omega)$, где $\{\vec{u}, p\}$ – единственное решение задачи (3.23) – (3.25), удовлетворяющее условию $\int_{\Omega} p(x) dx = 0$.

При описании алгоритма Эрроу–Гурвица была использована трилинейная форма $\tilde{b}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$$\tilde{b}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_i) w_j dx - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i v_i (D_i w_j) dx.$$

это непрерывная трилинейная форма на $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ существует константа $\tilde{c} = \tilde{c}(n)$, $n \leq 4$, такая, что

$$(\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in H_0^1(\Omega)) [|\tilde{b}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq \tilde{c}(n) \|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|, \|\vec{w}\|]$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \quad \text{если } \vec{u} \in V, \vec{v}, \vec{w} \in H_0^1(\Omega), \\ \tilde{b}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) &= 0, \quad \text{если } \vec{u}, \vec{v} \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Алгоритмы метода Монте–Карло для решения задачи 3.5. Рассмотрим задачу 3.5. Зададим произвольные функции $\vec{u}^0(x)$ и $p^0(x)$ вычислим

$$i) \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \operatorname{div} \vec{u}^0(x), \quad ii) \Delta \vec{u}^0(x), \quad iii) \operatorname{grad} p^0(x).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_i^m(x) &= \beta \cdot u_i^m(x), \quad b^m(x) = \left(\frac{\beta}{2}\right) \operatorname{div} \vec{u}^m(x), \\ \vec{f}^m(x) &= (\beta\nu - 1) \Delta \vec{u}^m(x) + \beta \cdot \operatorname{grad} p^m + \beta \cdot \vec{f}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Тогда для $m = 0$ получим задачу:

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{u}^1(x) + \sum_{i=1}^n a_i^0(x) D_i \vec{u}^1(x) + b^0(x) \vec{u}^1(x) &= \vec{f}^0(x), \\ \vec{u}^1(x) &\in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Известно, что уравнение (3.37) заменой переменных сводится к уравнению Гельмгольца. Допустим, что мы получили задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца относительно новой переменной \vec{w} :

$$\Delta \vec{w}^1(x) - c \vec{w}^1(x) = -\vec{f}_0^{\rightarrow}, \quad \vec{w}^1(x) \in H_0^1(\Omega), \quad (3.38)$$

где $c \geq 0$, c – постоянная величина \vec{f}_0^{\rightarrow} – некоторая известная функция, которая получается после замены переменных в уравнении (3.37) из \vec{f}^0 .

Теперь задача (3.38) решается "блужданием по сферам". Первые и вторые производные от решения также оцениваются методом Монте–Карло. Без оценки этих производных, то есть, не зная $\operatorname{div} \vec{u}^1$ и $\Delta \vec{u}^1$ мы не можем переходить к следующему шагу итерации, так как без них не определяется правая часть $f^m(x)$ очередного уравнения. Для $m = 0$ p^1 вычисляется с помощью (3.35). Зная оценки $\operatorname{div} \vec{w}^1$ и $\Delta \vec{w}^1$ зависимость переменных \vec{u}, \vec{v} , мы легко определим $\operatorname{div} \vec{u}^1$ и $\Delta \vec{u}^1$, а зная последние – $\vec{f}^1(x)$ из (3.36).

Таким образом, шаг за шагом, итерационный процесс реализуется с помощью алгоритмов метода Монте–Карло. Критерий выхода из итерационного процесса такой же, что для задачи 3.3, то есть (3.21) и (3.22).

Замечание 3.1 *Задача Дирихле для уравнения эллиптического типа*

(3.37) решается путем сведения ее к интегральному уравнению, удовлетворяющему

некоторым условиям и построением $\varepsilon(\delta)$ -смещенных оценок решения

на траектории сходящейся марковской цепи. [116] – [121].

Методом, указанным в работе [15], нельзя оценить производные от решения. По этой причине мы не можем переходить к очередному шагу итерации. На наш взгляд алгоритм построения цепи Маркова по [15] сложнее с точки зрения реализации на компьютере, чем алгоритм построения цепи Маркова с помощью "блуждания по сферам". [13].

3.3 Полные уравнения Навье–Стокса

Пусть Ω – ограниченная липшицева область в R^n , и пусть $T > 0$ фиксировано. Обозначим через Q цилиндр $\Omega \times (0, T)$. В классической формулировке начально–краевая задача для полных уравнений Навье–Стокса выглядит следующим образом: найти вектор–функцию $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow R^n$ и

скалярную функцию $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow R$ такие, что

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \vec{u} + \text{grad } p = \vec{f} \text{ в } Q, \quad (3.39)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \text{ в } Q, \quad (3.40)$$

$$\vec{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.41)$$

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) \text{ в } \Omega. \quad (3.42)$$

Заданные функции \vec{f} и $\vec{u}_0(x)$ определены на $\Omega \times [0, T]$ и Ω соответственно. Пусть b – непрерывная трilinearная форма на V , то есть

$$b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx. \quad (3.43)$$

Если $\vec{u} \in V$, то

$$(\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) [b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0] \quad (3.44)$$

Для $\vec{u}, \vec{v} \in V$ обозначим через $B(\vec{u}, \vec{v})$ элемент из V' , определяемый равенством

$$(\forall \vec{w} \in V) [\langle B(\vec{u}, \vec{v}), \vec{w} \rangle = b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})] \quad (3.45)$$

и положим

$$(\forall \vec{u} \in V) [B(\vec{u}, \vec{u}) = B(u) \in V']. \quad (3.46)$$

Если \vec{u}, p – классические решения задачи (3.39) – (3.42), например, $\vec{u} \in C^2(\bar{Q})$, то очевидно $\vec{u} \in L_2(0, T; V)$ и для $\vec{v} \in \wp$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}, \vec{v}) + \nu((\vec{u}, \vec{v})) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle. \quad (3.47)$$

По непрерывности равенство (3.47) будет выполняться для каждого $\vec{v} \in V$. Отсюда следует слабая формулировка задачи (3.39) – (3.42):

Задача 3.6 Для заданных \vec{u}_0 и \vec{f} таких, что

$$\vec{f} \in L_2(0, T; V'), \quad \vec{u}_0 \in H \quad (3.48)$$

найти функцию \vec{u} , удовлетворяющую условиям

$$(\forall \vec{v} \in V) \left[\frac{d}{dt}(\vec{u}, \vec{v}) + \nu((\vec{u}, \vec{v})) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \right]. \quad (3.49)$$

$$\vec{u} \in L_2(0, T; V), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \quad (3.50)$$

Приведем другую формулировку задачи 3.6.

Задача 3.7 Для заданных \vec{f} и \vec{u}_0 , удовлетворяющих (3.48) найти функцию \vec{u} , удовлетворяющую условиям

$$\vec{u} \in L_2(0, T, V), \quad \vec{u}' \in L_1(0, T; V'), \quad (3.51)$$

$$\vec{u} + \nu A\vec{u} + B\vec{u} = \vec{f} \text{ на } (0, T), \quad (3.52)$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0. \quad (3.53)$$

Корректность Задачи 3.6 следует из следующих свойств пространств V, H, V' и оператора A . Пространство V вложено в H и плотно в нем, причем вложение непрерывно, H' и V' обозначают пространства, сопряженные к H и V . Для этих пространств справедливы включения:

$$V \subseteq H \equiv H' \subseteq V',$$

где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны. Скалярное произведение в H элементов $\vec{f} \in H$ и $\vec{u} \in V$ совпадают со значением функционала \vec{f} на элементе \vec{u} в смысле двойственности между V' и V :

$$(\forall \vec{f} \in H)(\forall \vec{u} \in V)[\langle \vec{f}, \vec{u} \rangle = (\vec{f}, \vec{u})]$$

Для каждого \vec{u} из V форма

$$\vec{v} \in V \rightarrow ((\vec{u}, \vec{v})) \in R$$

линейна и непрерывна на V ; следовательно существует элемент из V' , который обозначим через $A\vec{u}$ такой, что

$$(\forall \vec{v} \in V)[\langle A\vec{u}, \vec{v} \rangle = ((\vec{u}, \vec{v}))].$$

Оператор A непрерывный линейный оператор из V в V' . Задача 3.6 и Задача 3.7 являются эквивалентными.

Теорема 3.7 Пусть $n \leq 4$, и пусть заданы \vec{f}, \vec{u}_0 , удовлетворяющие (3.48). Тогда существует по крайней мере одна функция \vec{u} , удовлетворяющая (3.51) – (3.53). При этом $\vec{u} \in L_\infty(0, T; H)$ и слабо непрерывна как функция из $[0, T]$ в H .

Доказательство теоремы приводится в работе [6]. Мы здесь отметим, что у Задачи 3.7 существует единственное решение, если $n = 2$ и по крайней мере одно решение, если $n = 3$.

Дискретизация Задачи 3.7 по временной переменной.

Пусть Ω – ограниченная область, $n \leq 3$ и

$$\vec{f} \in L_2(0, T; H), \quad \vec{u}_0 \in H.$$

Разобьем интервал $[0, T]$ на M частей длины $\tau : \tau = T/M$. Для данного τ сопоставим всякой функции \vec{f} элементы $\vec{f}^1, \dots, \vec{f}^M \in L_2(\Omega)$:

$$\vec{f}^m = \frac{1}{\tau} \int_{(m-1)\tau}^{m\tau} \vec{f}(t) dt, \quad m \in 1, 2, \dots, M. \quad (3.54)$$

Рассмотрим две схемы. В каждой из этих схем мы начинаем рекуррентный процесс с \vec{u}_0 .

Схема 3.1

$$\begin{aligned} & (\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) (\forall p^m \in L_2(\Omega)) [\tau^{-1}(\vec{u}^m - \vec{u}^{m-1}, \vec{v}) + \\ & + \nu((\vec{u}^m, \vec{v})) b(\vec{u}^{m-1}, u^{m-1} \vec{v}) - (p^m, \operatorname{div} \vec{v}) = (\vec{f}^m, \vec{v})]. \end{aligned}$$

Схема 3.2

$$(\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) [\tau^{-1}(\vec{u}^m - \vec{u}^{m-1}, \vec{v}^m) + \\ + \nu((\vec{u}^{m-1}, \vec{v})) b(\vec{u}^{m-1}, u^{m-1}, \vec{v}) - (p^m, \operatorname{div} \vec{v}) = (\vec{f}^m, \vec{v})].$$

Схема 3.1 неявная в линейной и явная в нелинейной части уравнений, а Схема 3.2 полностью явная.

Алгоритм Удзавы для Схемы 3.1.

Пусть элементы $(m-1)$ -го слоя уже вычислены и нам надо найти неизвестные $\vec{u}^m \in V(\Omega)$, $p^m \in L_2(\Omega)$. Они получаются как пределы двух последовательных элементов

$$\vec{u}_k^m \in H_0^1(\Omega), p_k^m \in L_2(\Omega), k = 0, 1, \dots, \infty. \quad (3.55)$$

Начнем с произвольного $p_0^m \in L_2(\Omega)$. Если p_k^m уже известны, то определим \vec{u}_{k+1}^m и p_{k+1}^m ($k \geq 0$) из уравнений

$$(\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) [(\vec{u}_{k+1}^m, \vec{v}) + \tau \cdot \nu((\vec{u}_{k+1}^m, \vec{v})) + \tau \cdot b(\vec{u}^{m-1}, \vec{u}^{m-1}, \vec{v}) - \\ - \tau \cdot (p_k^m, \operatorname{div} \vec{v}) = (\vec{u}^{m-1}, \vec{v}) + \tau \cdot (\vec{f}^m, \vec{v})]. \quad (3.56)$$

$$(\forall q \in L_2(\Omega)) [(p_{k+1}^m - p_k^m, q) + \\ + \alpha \cdot (\operatorname{div} \vec{u}_{k+1}^m, q) = 0], p_{k+1}^m \in L_2(\Omega), \quad (3.57)$$

Предложение 3.1 Если число α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 2\nu/n$,

где $n \in \{2, 3\}$ – размерность пространства, то \vec{u}_k^m сходится при $k \rightarrow$

∞ к u^m в $H_0^1(\Omega)$, а p_k^m сходится к p^m в $L_2(\Omega)/R$.

Это предложение доказывается также как предложение 6.7 из [6] с полной дискретизацией пространств V, H_0^1 пространствами V_h и W_h . Дискретная дивергенция $D_h u_h$ для $u_h \in W_h$ определяется как ступенчатая функция из некоторого пространства X_h . Все эти вопросы, связанные с аппроксимацией по пространственным переменным, можно найти в [6]. Отметим, что мы не дискретизируем по пространственным переменным, то есть не аппроксимируем пространства V, H_0^1 , а строим с помощью алгоритмов Удзавы или Эрроу–Гурвица последовательности функций u_k^m из $H_0^1(\Omega)$ и p_k^m из $L_2(\Omega)$ $k =$

$1, 2, \dots, \infty$ такие, что элемент \vec{u}^m из V может быть заменен (аппроксимирован) последовательностью \vec{u}_k^m $k = 1, 2, \dots, \infty$ элементов из $H_0^1(\Omega)$ со сколь угодно большой точностью. Это и есть идея классических методов оптимизации типа Галеркина. Классическая оптимизация пространств V, H_0^1 , а затем применение каких-либо численных методов (кроме метода Монте–Карло) для решения системы (3.56) – (3.57) не всегда приводит к желаемому результату, так как при решении многомерных задач математической физики лучше всех зарекомендовал себя метод Монте–Карло.

Алгоритм Эрроу–Гурвица.

Функции \vec{u}^m, p^m вычисляются как пределы двух последовательностей элементов $\vec{u}_k^m \in H_0^1(\Omega), p_k^m \in L_2(\Omega), (k \geq 0)$. Для положительных параметров α и β алгоритм начинается с любых $\vec{u}_0^m \in H_0^1(\Omega)$ и $p_0 \in L_2(\Omega)$. Если p_k^m и \vec{u}_k^m уже известны, то определяем $p_{k+1}^m, \vec{u}_{k+1}^m$ как решения уравнений для Схемы 3.1:

$$\begin{aligned} & \vec{u}_{k+1}^m \in H_0^1(\Omega), \quad p_{k+1}^m \in L_2(\Omega), \\ & (\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) [\tau \cdot ((\vec{u}_{k+1}^m - \vec{u}_k^m, \vec{v})) + \\ & + (\vec{u}_k^m, \vec{v}) + \tau \cdot \nu \cdot ((\vec{u}_k^m, \vec{v})) + \tau \cdot b(\vec{u}^{m-1}, \vec{u}^{m-1}, \vec{v}) - \\ & - \tau \cdot (p_k^m, \operatorname{div} \vec{v}) = (\vec{u}^{m-1}, \vec{v}) + \tau \cdot (\vec{f}^m, \vec{v})], \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$(\forall q \in L_2(\Omega)) [\alpha(p_{k+1}^m - p_k^m, q) + \beta \cdot (\operatorname{div} \vec{u}_{k+1}^{m,q}) = 0] \quad (3.59)$$

для схемы 3.2:

$$\begin{aligned} & \vec{u}_{k+1}^m \in H_0^1(\Omega), \quad p_{k+1}^m \in L_2(\Omega), \\ & (\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)) [\tau \cdot ((\vec{u}_{k+1}^m - \vec{u}_k^m, \vec{v})) + (\vec{u}_k^m, \vec{v}) + \tau \cdot \nu \cdot ((\vec{u}^{m-1}, \vec{v})) + \\ & + \tau \cdot b(\vec{u}^{m-1}, \vec{u}^{m-1}, \vec{v}) - \tau \cdot (p_k^m, \operatorname{div} \vec{v}) = \\ & = (\vec{u}^{m-1}, \vec{v}) + \tau \cdot (\vec{f}^m, \vec{v})], \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$(\forall q \in L_2(\Omega)) [\alpha(p_{k+1}^m - p_k^m, q) + \beta \cdot (\operatorname{div} \vec{u}_{k+1}^m, q) = 0], \quad (3.61)$$

Предложение 3.2 Пусть α и β удовлетворяют условию

$$0 < \beta < \frac{2\alpha\nu}{\alpha\nu^2 + n},$$

где $n = 2, 3$ – размерность пространства. Тогда \vec{u}_k^m сходится при $k \rightarrow$

∞ к \vec{u}^m в $H_0^1(\Omega)$, а p_k^m сходится к p^m в $L_2(\Omega)/R$.

Это утверждение доказывается аналогично Предложению 3.1.

Применение методов Монте–Карло.

Применим алгоритм Удзавы для Схемы 3.1. Для этого уравнение (3.56) перепишем в виде

$$\Delta \bar{u}_{k+1}^m - c \bar{u}_{k+1}^m = \bar{g}_k^m \quad \text{в } \Omega, \quad (3.62)$$

где

$$c = \frac{1}{\tau\nu}, \quad c > 0, \quad \bar{g}_k^m = \frac{1}{\nu} \operatorname{grad} p_k^m + \bar{R}^{m-1},$$

$$\bar{R}^{m-1} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n u_i^{m-1} \frac{\partial \bar{u}^{m-1}}{\partial x_i} + \frac{1}{2\nu} (\operatorname{div} \bar{u}^{m-1}) \bar{u}^{m-1} - c \cdot \bar{u}^{m-1} - \frac{1}{\nu} \bar{f}^m$$

Уравнение (3.57) записываем так

$$p_{k+1}^m = p_k^m - \alpha \operatorname{div} \bar{u}_{k+1}^m \quad \text{в } \Omega. \quad (3.63)$$

Теперь к уравнению (3.62) присоединим "граничное условие"

$$\bar{u}_{k+1}^m = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3.64)$$

Тогда (3.62) и (3.64) дают задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца. Напомним, что m – номер временного слоя, а k – номер итерации. "Граничное" условие (3.64) выполняется в силу свойств пространства $H_0^1(\Omega)$. Задачу (3.62) – (3.64) решаем, например, "блужданием по сферам" оценим $\bar{u}_{k+1}^m(x)$. Затем методом Монте–Карло оценим

$$\frac{\partial \bar{u}_{k+1}^m}{\partial x_i}, \quad \Delta \bar{u}_{k+1}^m.$$

Тогда из (3.63) можно определить p_{k+1}^m . Для потенциального течения ($\operatorname{rot} \bar{u} = 0$) из (3.63) получим

$$\operatorname{grad} p_{k+1}^m = \operatorname{grad} p_k^m - \alpha \Delta \bar{u}_{k+1}^m = \operatorname{grad} p_k^m - \alpha (c \bar{u}_{k+1}^m + \bar{g}_k^m). \quad (3.65)$$

А из равенства

$$\bar{g}_k^m = \frac{1}{\nu} \operatorname{grad} p_k^m + \bar{R}^{m-1}$$

для $k := k + 1$ и используя (3.65), получим

$$\bar{g}_{k+1}^m = \frac{1}{\nu} (\operatorname{grad} p_k^m - \alpha c \bar{u}_{k+1}^m - \alpha \bar{g}_k^m) + \bar{R}^{m-1}. \quad (3.66)$$

Вектор-функция \vec{g}_{k+1}^m служит правой частью для следующей задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца вида (3.62), (3.64) с номером итерации $k+2$. Продолжая этот итерационный процесс, мы оценим $\vec{u}_{k_1}^m$ и $p_{k_1}^m$, где k_1 такой номер итерации, для которого выполнены условия

$$\left\| \vec{u}_{k_1-1}^m - \vec{u}_{k_1}^m \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \varepsilon_1, \quad (3.67)$$

$$\left\| p_{k_1}^m - p_{k_1}^m \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon_2, \quad (3.68)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – заданные положительные малые числа. Теперь можно переходить к следующему временному слою $m+1$.

Таким образом мы можем оценить методом Монте-Карло в точке $x \in \Omega$ для всех слоев по времени $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ приближенные решения полных уравнений Навье-Стокса

$$\vec{u}_{k_m}^m, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (3.69)$$

Покажем применение методов Монте-Карло для потенциального течения к алгоритму Эрроу-Гурвица для Схемы 3.1. Для этого уравнения (3.58) – (3.59) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u}_{k+1}^m &= (1 - \nu) \Delta \vec{u}_k^m + \frac{1}{\tau} \vec{u}_k^m + \text{grad } p_k^m + \sum_{i=1}^n u_i^{m-1} \cdot \frac{\partial \vec{u}^{m-1}}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{1}{2} (\text{div } \vec{u}^{m-1}) \vec{u}^{m-1} - \frac{1}{\tau} \vec{u}^{m-1} - \vec{f}^m. \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$p_{k+1}^m = p_k^m - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \text{div } \vec{u}_{k+1}^m. \quad (3.71)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \vec{R}_1^{m-1} &= \sum_{i=1}^n u_i^{m-1} \frac{\partial \vec{u}^{m-1}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} (\text{div } \vec{u}^{m-1}) \vec{u}^{m-1} - \frac{1}{\tau} \vec{u}^{m-1} - \vec{f}^m, \\ \vec{h}_k^m &= (1 - \nu) \Delta u_k^m + \frac{1}{\tau} \vec{u}_k^m + \text{grad } p_k^m + \vec{R}_1^{m-1}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Теперь к уравнению (3.70) присоединяя "граничное условие" $\vec{u}_{k+1}^m = 0$ на $\partial\Omega$, получим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u_{k+1}^m = \vec{h}_k^m \quad (3.73)$$

$$\vec{u}_{k+1}^m = 0 \quad (3.74)$$

Задача (3.73), (3.74) решается с помощью алгоритма "блуждания по сферам"; производные $\Delta \vec{u}_{k+1}^m$, $\operatorname{div} \vec{u}_{k+1}^m$ и $\partial \vec{u}_{k+1}^m / \partial x_i$ также определяются методом Монте–Карло. Для потенциального течения из (3.71) получим

$$\operatorname{grad} p_{k+1}^m = \operatorname{grad} p_k^m - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \Delta \vec{u}_{k+1}^m. \quad (3.75)$$

Подставляя это равенство в (3.72) для номера итерации $k + 1$, получим

$$\begin{aligned} \vec{h}_{k+1}^m &= (1 - \nu) \Delta \vec{u}_{k+1}^m + \frac{1}{\tau} \vec{u}_{k+1}^m + \operatorname{grad} p_{k+1}^m + \vec{R}_1^{m-1} = \\ &= (1 - \nu) \Delta \vec{u}_{k+1}^m + \frac{1}{\tau} \vec{u}_{k+1}^m + \operatorname{grad} p_k^m - \frac{\beta}{\alpha} \Delta \vec{u}_{k+1}^m + \vec{R}_1^{m-1} = \\ &= \left(1 - \nu - \frac{\beta}{\alpha}\right) \Delta \vec{u}_{k+1}^m + \frac{1}{\tau} \vec{u}_{k+1}^m + \operatorname{grad} p_k^m + \vec{R}_1^{m-1}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Этим мы определим правую часть следующего уравнения итерации. Выход из итерационного процесса обеспечивается условиями (3.67) и (3.68). Теперь можно переходить к следующему временному слою. И так далее, для всех $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ определим приближенные решения полных уравнений Навье–Стокса.

Применение алгоритма Удзавы к Схеме 3.2 – полностью явной схеме, приводит к явному вычислению \vec{u}_{k+1}^m при известном \vec{u}^m и p_0^m (при $m = 0$, \vec{u}^0 известная величина в силу начальных данных). А в случае применения алгоритма Эрроу–Гурвица к Схеме 3.2 получаем также задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Эта задача отличается от предыдущей задачи лишь правой частью, то есть функцией \vec{h}_k^m . Правая часть для этой задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} \vec{h}_{1k}^m &= \Delta \vec{u}_k^m + \frac{1}{\tau} \vec{u}_k^m + \operatorname{grad} p_k^m + \vec{R}_2^{m-1}, \\ \vec{R}_2^{m-1} &= -\nu \Delta u^{m-1} + \vec{R}_1^{m-1}, \\ \vec{h}_{1k}^m &= \vec{h}_k^m - \nu \Delta \vec{u}_k^{m-1}. \end{aligned}$$

Повторяя все процедуры решения предыдущей задачи, мы также можем построить приближенное решение полных уравнений Навье – Стокса.

Замечание 3.2 Алгоритм оценивания производных от решения задачи

Дирихле для уравнения Гельмгольца или Пуассона приводится ниже.

3.4 Об одном алгоритме методов Монте–Карло

При решении полных уравнений Навье–Стокса в области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \in R_3$, $T > 0$ с помощью дискретизации только по временной переменной методом дробных шагов получают две задачи или одну задачу и одно уравнение для промежуточных слоев по времени.

Для вектор–функции скорости жидкости U – задачу Дирихле для уравнения Пуассона или Гельмгольца, а для давления p – задачу Неймана для уравнения Пуассона или просто уравнение Пуассона. Переход на целый слой осуществляется с помощью функционального уравнения (3.77 – 3.80).

Мы рассмотрим один из способов. Опуская индексы целых и промежуточных слоев по времени, запишем

$$\Delta U(x) - cU(x) = -f(x) \text{ в } \Omega, \quad (3.77)$$

$$U(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad (3.78)$$

в соответствующем пространстве учитывающее "взятие нормальной компоненты" на границе $\partial\Omega$, то есть обеспечивающее $\vec{n} \cdot \vec{U} = 0$, где \vec{n} – внутренняя нормаль, $c > 0$.

Для давления p получим уравнение Пуассона

$$\Delta p(x) = \frac{1}{\tau} \operatorname{div} U \text{ в } \Omega, \quad (3.79)$$

где $\tau > 0$ – шаг по времени.

Задача (3.77) – (3.78) решается с помощью алгоритма "блуждание по сферам". Производные по x_i ($i = 1, 2, 3$) от $U_\varepsilon(x)$, то есть от ε -смещенного решения, оцениваются также методом Монте–Карло.

Обозначим через V значение U_ε на целом слое по времени. Переход на целый слой осуществляется по формуле

$$V(x) = U_\varepsilon(x) - \tau \operatorname{grad} p(x). \quad (3.80)$$

Отсюда видно, что необходимо вычислить (или оценить) производные по x_i ($i = 1, 2, 3$) от $p(x)$.

Решение (3.79) запишем в виде

$$p(x) = -\frac{1}{4\pi\tau} \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \operatorname{div} U_\varepsilon(y) dy. \quad (3.81)$$

Теперь вычислим

$$\partial p / \partial x_1 = \frac{1}{4\pi\tau} \int_{\Omega} \frac{\alpha_i}{|x-y|^3} \operatorname{div} U_{\varepsilon}(y) dy, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha_i = x_i - y_i. \quad (3.82)$$

Алгоритм перехода на целый слой по времени.

1. Из точки x моделируется цепь $\{(x_n), (x_0 = x)\}$ до первого попадания в ε – окрестность границы $\partial\Omega_{\varepsilon}$ определяется точка x^* (x – ближайшая к последнему состоянию $x_n = x_N$ точка границы, N – случайный номер последнего состояния).

2. Соответственно плотности

$$g_{\rho, \theta, \phi}(x) = \frac{x \operatorname{sh}(R-x)\sqrt{c}}{F_R \operatorname{sh}(R\sqrt{c})} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{2}, \quad \rho = |r - r'|,$$

$$F_R = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{R}{\operatorname{sh}(R\sqrt{c})} \right)$$

в каждой сфере S_R вычисляется значение функции

$$\varphi(r, \rho, \omega) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{R}{\operatorname{sh}(R\sqrt{c})} \right) f(r + \rho\omega).$$

Здесь r – радиус-вектор точки x , r' – радиус-вектор следующей за x случайной точки y , ω – единичный случайный изотропный вектор. Подсчитываются веса Q_n , $n = 1, 2, \dots, Q_0 - 1$,

$$Q_n = Q_{n-1} \frac{R_{n-1}\sqrt{c}}{\operatorname{sh}(R_{n-1}\sqrt{c})}, \quad R_n = R(x_n).$$

3. Вычисляется математическое ожидание случайной величины ξ :

$$M\xi = M \left\{ \varphi(x, \rho, \omega_0) + \sum_{n=1}^{N-1} Q_n \varphi(x_n, \rho_n, \omega_n) + Q_N \varphi(x_N^*) \right\} = U_{\varepsilon 1}.$$

Заметим, что в нашем случае $\varphi(x) = 0$, так как граничное условие для $U = 0$ (см. (3.78)).

4. Производные по x_i ($i = 1, 2, 3$) от ε – смещенного решения $U_{\varepsilon 1}$ задачи (3.77) – (3.78) вычисляются по формуле:

$$(\partial U_{\varepsilon}(x) / \partial x_i) = \int_{V_R} K_1^i(x, y) U_{\varepsilon 1}(y) dy + \int_{V_R} Z_2^i(x, y) f(y) dy,$$

где

$$\begin{aligned}
 K_1^i(x, y) &= c^{5/2} \alpha_i / (4\pi(R^2 c \operatorname{sh}(r\sqrt{c}) - 3R\sqrt{c} \operatorname{ch}((R\sqrt{c}) + 3 \operatorname{sh}(R\sqrt{c}))), \\
 Z_2^i(x, y) &= \alpha_i ((R^2 c + 3)(\operatorname{sh}((R - r)\sqrt{c}) + r\sqrt{c} \operatorname{ch}(R - r)\sqrt{c}) - \\
 &\quad - 3R\sqrt{c}(\operatorname{ch}((R - r)\sqrt{c}) + r\sqrt{c} \operatorname{sh}((r - r)\sqrt{c}) + 3(\operatorname{sh}(r\sqrt{c}) - \\
 &\quad - r\sqrt{c} \operatorname{ch}(r\sqrt{c}))) / (4\pi r^3 (R^2 c \operatorname{sh}(R\sqrt{c}) - 3R\sqrt{c} \operatorname{ch}(R\sqrt{c}) + 3 \operatorname{sh}(R\sqrt{c}))), \\
 \alpha_i &= x_i - y_i.
 \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{div} U_\varepsilon = \sum_{1=1}^3 (\partial U_{\varepsilon 1}(x) / \partial x_1), \quad (3.83)$$

то есть определяется правая часть уравнения (3.79) для перехода к следующему слою по p ;

5. С помощью (3.82) находим $\operatorname{grad} p(x)$.

6. Теперь осуществляем переход на целый слой по времени с помощью (3.80).

Заметим, что для нахождения $U(x)$ и $\operatorname{div} U(x)$ были построены ε -смещенные оценки, а $p(x)$ определяется с точностью до произвольного постоянного. Поэтому оценка V_ε , полученная для очередного целого слоя по времени, также будет ε -смещенной.

3.5 Об одном методе Монте–Карло вычисления производных от решения

Решая линеаризованное уравнение Навье–Стокса в области $Q = \Omega \times (0, T)$ с помощью метода дробных шагов с двумя промежуточными интервалами, получают две задачи для временных слоев $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ в $L_2(\Omega)$:

Задача 3.8

$$\Delta u^{m+1/2}(x) - cu^{m+1/2}(x) = -g^m(x) \text{ в } \Omega, \quad (3.84)$$

$$u^{m+1/2}(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (3.85)$$

Задача 3.9

$$\Delta p^{m+1}(x) = \frac{1}{\tau} \operatorname{div} u^{m+1/2}(x) \text{ в } \Omega, \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial p^{m+1}(x)}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (3.87)$$

Переход осуществляется на целый слой по времени с помощью уравнения

$$u^{m+1}(x) = u^{m+1/2}(x) - \tau \operatorname{grad} p^{m+1}(x) \text{ в } \Omega. \quad (3.88)$$

Мы здесь оценим методом Монте-Карло $\operatorname{grad} p^{m+1}(x)$. Опуская индексы $m+1$, $m+1/2$ из (3.86) – (3.87), получим

$$\begin{aligned} p(x) = & \frac{1 + \chi_{\partial\Omega}(x)}{4\pi} \int_{\partial\Omega} (1 - 2\alpha(x)r^3) \frac{\cos \varphi_{xy}}{r^2} p(y) d_y S - \\ & - \frac{1 + \chi_{\partial\Omega}(x)}{4\pi\tau} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} + \alpha(x)r^2 \right) \operatorname{div} u(y) dy. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Здесь $\chi_{\partial\Omega}(x)$ – индикатор границы. Второй интеграл известен, так как он получается из оценки производных от решения задачи 3.8 с помощью алгоритма "блуждания по сферам". В качестве $\alpha(x)$ возьмем $\alpha(x) = 1/(2d^3)$, где d – диаметр области. Дифференцируя уравнение (3.89) по x_i ($i = 1, 2, 3$), получим

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x_i} = \frac{1 + \chi_{\partial\Omega}(x)}{4\pi} \int_{\partial\Omega} k_i(x, y) p(y) d_y S - g_i(x), \quad (3.90)$$

где

$$\begin{aligned} k_i(x, y) = & \frac{3\beta_i \cos \varphi_{xy}}{r^4} - \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\alpha^3} \right) n_{y_i} \\ g_i(x) = & \frac{1 + \chi_{\partial\Omega}(x)}{4\pi\tau} \cdot \int_{\Omega} \beta_i \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{d^3} \right) \operatorname{div} u(y) dy, \quad \beta_i = x_i - y_i, \end{aligned}$$

n_{y_i} координаты вектора n_y .

Итак, решая (3.89) с помощью алгоритма "блуждания по границам" оценим $p(x)$. Затем из соотношения (3.90) оценим $\text{grad } p(x)$. Можно построить различные ε -смещенные оценки.

3.6 Стационарные линеаризованные уравнения

слабо сжимаемой жидкости

Рассмотрим задачу

$$-\nu \Delta \vec{u} - \varepsilon^{-1} \text{grad div } \vec{u} = f \quad \text{в } \Omega \quad (3.91)$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3.92)$$

где $\varepsilon > 0$ – малая величина. Уравнения (3.91) – (3.92) называются линеаризованными уравнениями слабо сжимаемой жидкости или стационарными уравнениями Ламе из теории упругости.

Задача (3.91) – (3.92) имеет единственное решение \vec{u} для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ и \vec{u} сходится к решению задачи Стокса при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим через \vec{v} решение задачи Стокса.

Теорема 3.8 Пусть Ω – ограниченная липшицева область в R_n . Для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует единственный элемент $\vec{u} \in W_2^{0,1}(\Omega)$, который удовлетворяет (3.91). Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\vec{u} \rightarrow \vec{v}$ в норме $W_2^{0,1}(\Omega)$, $-\varepsilon^{-1} \text{div } \vec{u} \rightarrow p$ в норме $L_2(\Omega)$, где \vec{v} и p решение задачи

$$-\nu \Delta \vec{v} + \text{grad } p = f \quad \text{в } \Omega \quad \nu > 0, \quad (3.93)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.94)$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3.95)$$

кроме того

$$\int_{\Omega} p(x) dx = 0. \quad (3.96)$$

Известно много эффективных алгоритмов для решения уравнений Стокса и дискретизация уравнений (3.91) – (3.92) приводит при очень малых ε к плохо обусловленной матрице. Поэтому разумно вычислить \vec{u} для малых ε , используя уравнения Стокса. Для этого используют асимптотическое разложение для \vec{u} . Для ясности переобозначим решение задачи Стокса, удовлетворяющее (3.96), через \vec{v}^0, p^0 (вместо \vec{v}, p). Известно, что \vec{u} имеет асимптотическое разложение по ε .

$$\vec{u} = \vec{v}^0 + \varepsilon \vec{v}^1 + \varepsilon^2 \vec{v}^2 + \dots + \varepsilon^N \vec{v}^N + \dots, \quad (3.97)$$

где все $\vec{v}^i \in W_2^{0,1}(\Omega)$, (i – номер итерации для функции \vec{v}).

Функции \vec{v}^i и вспомогательные функции p^i определяются рекуррентно следующим образом:

$$\vec{v}^0 \text{ и } p^0 \quad (3.98)$$

уже известно (решение задачи Стокса), если \vec{v}^{k-1}, p^{k-1} (k – номер итерации, $k \geq 1$) известны, то \vec{v}^k, p^k определяются как решение неоднородной задачи Стокса

$$\vec{v}^k \in W_2^{0,1}(\Omega), \quad p^k \in L_2(\Omega), \quad (3.99)$$

$$-\nu \Delta \vec{v}^k + \text{grad } p^k = 0 \text{ в } \Omega, \quad (3.100)$$

$$\text{div } \vec{v}^k = -p^{k-1} \text{ в } \Omega, \quad (3.101)$$

$$\int_{\Omega} p^k(x) dx = 0. \quad (3.102)$$

Существование и единственность \vec{v}^k, p^k следует из теоремы о существовании и единственности неоднородной задачи Стокса [6].

Условие (3.102) гарантирует единственность p^k , которое в противном случае было бы единственно лишь с точностью до аддитивной постоянной; оно гарантирует также условие согласования, необходимое для $(k+1)$ -го шага:

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{v}^{k+1}(x) dx = \int_{\Omega} \vec{v}^{k+1} \cdot \vec{n} d(\partial\Omega) = 0 = \int_{\Omega} p^k(x) dx. \quad (3.103)$$

Обозначим через $\vec{v}_\varepsilon^N = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \vec{v}^k$, $p_\varepsilon^N = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k p^k$.

Теорема 3.9 Пусть Ω – ограниченная область класса C_∞ в R_n . Тогда для каждого $k \geq 1$ существуют однозначно определенные функции \vec{v}^k, p^k , удовлетворяющие соотношениям (3.99) – (3.102). (Для $k = 0$ задаются (3.98)). Для каждого $N \geq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\vec{u} - \vec{v}_\varepsilon^N}{\varepsilon^N} \rightarrow 0 \text{ в норме } W_2^0(\Omega)$$

$$\frac{-\varepsilon^{-1} \operatorname{div} \vec{u} - p_\varepsilon^N}{\varepsilon^N} \rightarrow 0 \text{ в норме } L_2(\Omega)$$

Приведенные теоремы доказываются в [6]. Более того, нетрудно доказать дискретный вариант теоремы 3.9.

Алгоритм методов Монте–Карло для решения неоднородной задачи Стокса. Опишем алгоритм метода Монте–Карло для решения неоднородной задачи Стокса; решение этой задачи в данный момент – единственное препятствие для практического вычисления асимптотического разложения (3.97) для \vec{u} .

для этого чуть изменим обозначения задачи (3.99) – (3.102).

$$\vec{v} \in W_2^0(\Omega), \quad p \in L_2(\Omega), \quad (3.104)$$

$$-\nu \Delta \vec{v} + \operatorname{grad} p = 0, \quad (3.105)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \varphi, \quad (3.106)$$

$$\int_{\Omega} p^k(x) dx = 0, \quad (3.107)$$

где φ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0. \quad (3.108)$$

Существование и единственность \vec{v} и p уже известны.

Алгоритм Удзавы решения задачи (3.104) – (3.107).

Начнем с произвольного $p^0 \in L_2(\Omega)$, такого что

$$\int_{\Omega} p^0(x) dx = 0. \quad (3.109)$$

Если p^k найдено, то \vec{v}^{k+1} ($k \geq 0$) определяется из соотношений

$$\begin{aligned} \vec{v}^{k+1} &\in W_2^{0,1}(\Omega), \\ -\nu \Delta \vec{v}^{k+1} &= \text{grad } p^k \in W_2^{*,1}(\Omega), \end{aligned} \quad (3.110)$$

а p^{k+1} определяется из соотношений

$$p^{k+1} = p^k - \rho(\text{div } \vec{v}^{k+1} - \varphi) \in L_2(\Omega). \quad (3.111)$$

Заметим, что $\int_{\Omega} p^k(x) dx = 0$, для любого $k \geq 0$. Здесь пространство $W_2^{*,1}(\Omega)$ – пространство, сопряженное пространству Соболева $W_2^1(\Omega)$, k -номер итерации. Сходимость этого алгоритма обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 3.10 *Если число ρ удовлетворяют условию*

$$0 < \rho < 2\nu,$$

то \vec{v}^{k+1} сходится при $k \rightarrow \infty$ к \vec{v} в норме $W_2^{0,1}(\Omega)$, а p^{k+1} сходится к p слабо в $L_2(\Omega)$. [6].

Алгоритм метода Монте–Карло решения задачи (3.110).

Для $k = 0$ задача (3.110) является задачей Дирихле для уравнения Пуассона, так как

$$\begin{aligned} \vec{v}^{k+1} &\in W_2^{0,1}(\Omega) \quad (k \geq 0) \\ \Delta \vec{v}^1(x) &= -\frac{1}{\nu} \text{grad } p^0(x) \equiv -\vec{g}^0(x), \quad \text{в } \Omega \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\vec{v}^1(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3.113)$$

Для того, чтобы оценить решение задачи (3.112) – (3.113) методом Монте-Карло, вычислим $\text{grad } p^0(x)$. Это возможно, так как в силу (3.109) $p^0(x)$ – начальное заданное приближение. Этим определяется правая часть уравнения (3.112) $\vec{g}^0(x)$.

Теперь с помощью алгоритма "блуждания по сферам" оценим $\vec{v}_{\varepsilon_1}^1(x)$ в точке x , где индекс $\varepsilon_1 > 0$ "мало и он соответствует ε_1 – окрестности границы $\partial\Omega_{\varepsilon_1}$ в алгоритме "блуждания по сферам". Строится случайная величина

$$\xi_{\varepsilon_1} = \Psi(x_0, \rho_0, \omega_0) + \sum_{n=1}^{N-1} \Psi(x_n, \rho_n, \omega_n),$$

где $x_0 = x$, $\{x_n\}$ – цепь Маркова, N – случайный номер последнего состояния цепи Маркова. Цепь обрывается, если расстояние от точки P_N границы $\partial\Omega$ будет меньше ε_1 .

$$\Psi(\vec{r}, \rho, \vec{\omega}) = \frac{d^2}{6} \vec{g}^0(\vec{r} + \rho \cdot \vec{\omega}),$$

где \vec{r} – радиус-вектор точки x , $\vec{\omega}_n$ – последовательность независимых изотропных векторов единичной длины, $d = d(x) = d(\vec{r})$ – расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$, $\rho = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – расстояние от точки x до случайного узла x' (радиус случайной сферы). Теперь, осредняя по всем траекториям M , имеем

$$\vec{v}_{\varepsilon_1}^1(x) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \xi_{\varepsilon_1 i},$$

где M – количество траекторий цепи Маркова.

Пусть необходимо вычислить $\frac{\partial \vec{v}^1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}$ в точке \vec{x}^* . Рассмотрим точку $\tilde{x} = (x_1^* + x, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Тогда решение задачи (3.112)-(3.113) в точке \tilde{x} для шара радиуса $d(\tilde{x})$ ($d(\tilde{x}) \equiv d_*$) имеет вид

$$\vec{v}^1(\tilde{x}) = \int_{S(\tilde{x})} \eta(\vec{\omega}, x) \vec{v}^1(s) ds + \int_{|\vec{r}-\tilde{x}| < d_*} G_x(\vec{r}, d_*) \vec{g}^0(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (3.114)$$

"Шаровая" функция Грина $G_x(\vec{r}, d_*)$ и ее нормальная производная $\eta(\vec{\omega}, x)$

выражаются формулами

$$G_x(\vec{r}, d_*) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \tilde{x}|} - \frac{d_*^2}{\sqrt{x^2 |\vec{r}|^2 + d_*^4 - 2d_* \cdot x \cdot x'}} \right) \quad (3.115)$$

$$\eta(\vec{\omega}, x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d_*(d_*^2 - x^2)}{(d_*^2 + x^2 - 2d_* \cdot x \cdot a)^{3/2}}, \quad (3.116)$$

где $\vec{\omega}$ – единичный вектор направления из \tilde{x} в x' а $a = a(x, \vec{\omega})$ – косинус угла между $\vec{\omega}$ и осью x , x' – величина проекции вектора $(\vec{r} - \tilde{x})$ на ось x (\tilde{x} – радиус-вектор точки \tilde{x}), $x < d(\tilde{x}) = d_*$.

Продифференцируем (3.114) по x , учитывая (3.115) и (3.116), положив $x = 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}^1(\tilde{x})}{\partial x_1} &= \int_{|\vec{r} - \tilde{x}| < d_*} \vec{g}^0(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x} G_x(\vec{r}, d_*) d\vec{r} \Big|_{x=0} + 4\pi M_\omega \left\{ \frac{\partial \eta(\vec{\omega}, x)}{\partial x} v^1(x') \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\vec{r} - \tilde{x}| < d_*} \frac{x' (d_*^3 - |\vec{r} - \tilde{x}|^3)}{d_*^3 |\vec{r} - \tilde{x}|^3} \vec{g}^0(\vec{r}) d\vec{r} + \\ &+ M \left\{ \frac{3a}{d_*} \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{4\pi d_i} \cdot \int_{|\vec{r} - p_i| < d} \frac{d_i - |\vec{r} - p_i|}{|\vec{r} - p_i|} \cdot \vec{g}^0(\vec{r}) d\vec{r} \right] \right\} \quad (3.117) \end{aligned}$$

Также определяются

$$\frac{\partial \vec{v}^1(\tilde{x})}{\partial x_i}, \quad (i = 2, \dots, n)$$

Этим способом можно определить оценки и для производных высших порядков, то есть

$$\frac{\partial^l \vec{v}^1(\tilde{x})}{\partial x_i^l} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad l = 2, 3, \dots$$

Отметим, что соотношение (3.114) позволяет оценивать решение во всех точках шара

$$|\vec{r} - \tilde{x}| < d_*.$$

В формуле (3.117) первый интеграл встречается при вычислении производных и по x_i ($i = 2, 3$) в трехмерном случае ($n = 3$). Поэтому целесообразно

ИСПОЛЬЗОВАТЬ ОДНУ ПЛОТНОСТЬ

$$\left[\sum_{i=1}^3 f_{x_i}^2(\vec{r}) \right]^{1/2} = \frac{d_*^3 - |\vec{r} - \vec{x}|^3}{d_*^2 |\vec{r} - \vec{x}|^2}, \quad (3.118)$$

$$|\vec{r} - \vec{x}| < d_*, \quad \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2} = |\vec{r} - \vec{x}|,$$

$$f_{x_i}(\vec{r}) = \frac{x_i' (d_*^3 - |\vec{r} - \vec{x}|^3)}{d_*^3 |\vec{r} - \vec{x}|^3}.$$

Теперь можно оценить все три интеграла по одному случайному "узлу" с плотностью (3.118). А интегралы, стоящие под знаком математического ожидания в (3.117), можно оценить по одному случайному "узлу" распределенному с плотностью

$$f(\vec{r}) \approx \frac{d_i - |\vec{r} - p_i|}{|\vec{r} - p_i|}. \quad (3.119)$$

Алгоритмы моделирования случайных величин с плотностями (3.118), (3.119) рассматриваются в [13].

Мы описали численный алгоритм метода Монте–Карло вычисления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона и вычисления первых и вторых производных от решения.

Чтобы перейти к следующему шагу итерации, необходимо вычислить p^1 . Это осуществляется с помощью формулы (3.111):

$$p_{\varepsilon_1}^1 = p^0 + \rho(\operatorname{div} \vec{v}_{\varepsilon_1}^1 - \phi).$$

Здесь p^0 - известное начальное приближение,

$$\operatorname{div} \vec{v}_{\varepsilon_1}^1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_{\varepsilon_1}^1}{\partial x_i}$$

оценены с помощью метода Монте–Карло. Вычислим $\operatorname{grad} p_{\varepsilon_1}^1$, используя формулу (3.111) для $k = 0$ и для потенциального течения имеем

$$\operatorname{grad} p_{\varepsilon_1}^1 = \operatorname{grad} p^0 + \rho \Delta \vec{v}_{\varepsilon_1}^1 - \rho \operatorname{grad} \varphi.$$

Составим задачу для определения \vec{v}^2 , то есть переходим ко второму шагу

итерации $k = 1$.

$$\begin{cases} \Delta \vec{v}^2(x) = -\frac{1}{\nu} \operatorname{grad} p_{\varepsilon_1}^1(x) \equiv -\vec{g}_{\varepsilon_1}^1(x), & \text{в } \Omega \\ \vec{v}^2(x) = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

И так далее, продолжая этот итерационный процесс, находим

$$\vec{v}_{\varepsilon_1}^1, \vec{v}_{\varepsilon_1}^2, \dots, \vec{v}_{\varepsilon_1}^N, \dots$$

Используя (3.97), находим приближенное решение задачи (3.91) – (3.92). Здесь верхний индекс показывает номер итерации.

3.7 Дискретизация линеаризованных уравнений

Навье–Стокса по временной переменной

Пусть Ω – ограниченная область в R^3 с границей $\partial\Omega$ и пусть $T > 0$ фиксировано. Обозначим через Q цилиндр $\Omega \times (0, T)$, границу цилиндра $\partial\Omega \times [0, T]$, обозначим через ∂Q . Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \operatorname{grad} p = \vec{f}, \quad \text{в } Q \quad (3.120)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \text{в } Q \quad (3.121)$$

$$\vec{u} = 0, \quad \text{на } \partial Q \quad (3.122)$$

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x), \quad \text{в } \Omega \quad (3.123)$$

где $\vec{u}(x, t)$ – вектор–функция с компонентами $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow R^3$; $p(x, t)$ – скалярная функция; $\Omega \times [0, T] \rightarrow R$, ν – кинематический коэффициент вязкости, $\nu > 0$. Заданные вектор–функции $\vec{f}(x, t)$ и $\vec{u}_0(x)$ определены на $\Omega \times [0, T]$ и Ω соответственно. Вопросы существования и единственности решения задачи (3.120), (3.123) рассмотрены в [6]. Опишем аппроксимацию линеаризованных уравнений Навье–Стокса методом дробных шагов с двумя промежуточными шагами без дискретизации по пространственным переменным. Пусть $D(\Omega)$ (соответственно $D(\bar{\Omega})$) обозначает пространство функций класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω (соответственно

$\bar{\Omega}$). Пусть B следующее пространство $B = \{\vec{u} \in D(\Omega), \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$, а замыкание B в $L_2(\Omega)$ обозначим через H . Предположим

$$\vec{f} \in L_2(0, T; H) \quad (3.124)$$

$$\vec{u}_0 \in H \quad (3.125)$$

Пусть интервал $[0, T]$ разбит на N интервалов длины τ ($T = \tau \cdot N$). Положим

$$\vec{f}^m = \frac{1}{\tau} \int_{(m-1)\tau}^{m\tau} \vec{f}(t) dt, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Определим некоторое семейство $\vec{u}^{m+1/2}, i = 1, 2, m = 0, 1, \dots, N - 1$ элементов из $L_2(\Omega)$. Эти элементы вычисляются последовательно в порядке возрастания дробного индекса $m + i/2$, начиная с $\vec{u}^0 = \vec{u}_0$

$$\frac{1}{\tau}(\vec{u}^{m+1/2} - \vec{u}^m) - \nu \Delta \vec{u}^{m+1/2} = \vec{f}^m, \quad \text{в } \Omega, \quad (3.126)$$

$$\frac{1}{\tau}(\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^{m+1/2}) + \operatorname{grad} p^{m+1} = 0, \quad \text{в } \Omega, \quad (3.127)$$

$$\operatorname{div} \vec{u}^{m+1} = 0, \quad \text{в } \Omega, \quad (3.128)$$

$$\vec{u}^0 = \vec{u}_0, \quad \text{в } \Omega, \quad (3.129)$$

$$\vec{u}^{m+1} = 0, \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3.130)$$

Априорные оценки для $\vec{u}^{m+1/2}$ и исследование схемы (3.126) – (3.130) на сходимость (утверждение о сходимости при выполнении (3.124) и (3.125)) проводятся также как в работе [6]. Применение оператора div к обеим сторонам (3.127) приводит к уравнению $\Delta p^{m+1} = \tau^{-1} \operatorname{div} \vec{u}^{m+1/2}$ в Ω , так как $\operatorname{div} \vec{u}^{m+1} = 0$ согласно (3.128) и $\operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv \Delta$. Таким образом мы получили следующую систему

$$\Delta \vec{u}^{m+1/2} - c \vec{u}^{m+1/2} = -\vec{g}^m, \quad \text{в } \Omega, \quad (3.131)$$

$$\Delta p^{m+1} = \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \vec{u}^{m+1/2}, \quad \text{в } \Omega, \quad (3.132)$$

$$\vec{u}^{m+1} = \vec{u}^{m+1/2} - \tau \operatorname{grad} p^{m+1}, \quad \text{в } \Omega, \quad (3.133)$$

где $c = 1/(\tau \cdot \nu)$, $\vec{g}^m = c \vec{u}^m + \vec{f}^m/\nu$. Предположим, что

$$\vec{u}^{m+1/2} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3.134)$$

Теперь, используя функцию Грина оператора $\Delta - c$ для шара V_R радиуса R , целиком лежащего в области Ω и с центром в точке x , решение задачи

(3.131), (3.134) в точке x можно представить в виде

$$\bar{u}^{m+1/2}(x) = \int_{S_R} \frac{R\sqrt{c}}{4\pi R^2 \operatorname{sh}(R\sqrt{c})} \bar{u}^{m+1/2}(s) ds + \int_{V_R} \frac{\operatorname{sh}((R-r)\sqrt{c})}{4\pi r \operatorname{sh}(R\sqrt{c})} \bar{g}^m(y) dy, \quad (3.135)$$

где S_R - граница шара V_R , $r = |x - y|$.

Применяя теорему о среднем значении для шара V_R , целиком лежащего в области Ω , и после несложного преобразования получим

$$\bar{u}^{m+1/2}(x) = \int_{V_R} k_1(x, y) \bar{u}^{m+1/2}(y) dy + \int_{V_R} Z_2(x, y) \bar{g}^m(y) dy, \quad (3.136)$$

где $k_1(x, y) = c^{3/2} / (4\pi(R\sqrt{c} \operatorname{ch}(R\sqrt{c}) - \operatorname{sh}(R\sqrt{c})))$,

$$Z_2(x, y) = (\operatorname{sh}(R\sqrt{c} + \operatorname{sh}((R-r)\sqrt{c}) - R\sqrt{c} \operatorname{ch}((R-r)\sqrt{c})) / (4\pi r(R\sqrt{c} \operatorname{ch}(R\sqrt{c}) - \operatorname{sh}(R\sqrt{c}))).$$

Используя представление функции Грина в виде ряда

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma) G_n(x, y) (n + 1/2),$$

где $P_n(\cos \gamma)$ - функция (полином) Лежандра, $G_n(x, y)$ - функция цилиндрических функций первого и второго рода:

$$G_n(x, y) = c \left(((Rc)^{-1/2} \cdot I_{n+1/2}(Rc) \cdot (yc)^{-1/2} \cdot K_{n+1/2}(yc) - (yc)^{-1/2} \cdot I_{n+1/2}(yc) \cdot (Rc)^{-1/2} \cdot K_{n+1/2}(yc) \right) \cdot \frac{1}{(Rc)^{-1/2} \cdot I_{n+1/2}(Rc)} \cdot ((xc)^{-1/2} \cdot I_{n+1/2}(xc))$$

где $x = (\sum_{i=1}^3 x_i^2)^{1/2}$, $y = (\sum_{i=1}^3 y_i^2)^{1/2}$,

$$I_s(z) = (z/2)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(s + k + 1)}$$

,

$$K_s(z) = \frac{\pi i}{2} \exp(s\pi i/2) \cdot H_s^{(1)}(z \exp(\pi/2 \cdot i))$$

– модифицированные функции Бесселя (видоизмененные цилиндрические функции). Здесь $H_s^{(1)}(z)$ – функция Ганкеля, $\Gamma(z)$ – Гамма функция. Учитывая

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial \cos \gamma} \cdot \frac{\partial \cos \gamma}{\partial x_i}$$

и $\cos \gamma = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$ продифференцируем уравнение (3.135) по x_i и применяем теорему о среднем значении. Тогда из (3.135) получим

$$\frac{\partial \vec{u}^{m+1/2}(x)}{\partial x_i} = \int_{V_R} k_1^i(x, y) \vec{u}^{m+1/2}(y) dy + \int_{V_R} Z_2^i(x, y) \vec{g}^m(y) dy, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.137)$$

где

$$k_1^i(x, y) = c^{5/2} \beta_i / (4\pi(R^2 c \operatorname{sh}(R\sqrt{c}) - 3R\sqrt{c} \operatorname{ch}(R\sqrt{c}) + 3\operatorname{sh}(R\sqrt{c})))$$

$$Z_2^i(x, y) = \beta_i ((R^2 c + 3)(\operatorname{sh}((R-r)\sqrt{c}) + r\sqrt{c} \operatorname{ch}((R-r)\sqrt{c})) - 3R\sqrt{c} \times$$

$$\times (\operatorname{ch}((R-r)\sqrt{c}) + r\sqrt{c} \operatorname{sh}((R-r)\sqrt{c})) + 3(\operatorname{sh}(r\sqrt{c}) - r\sqrt{c} \operatorname{ch}(r\sqrt{c}))) /$$

$$/ (4\pi r^3 (R^2 c \operatorname{sh}(R\sqrt{c}) - 3R\sqrt{c} \operatorname{ch}(R\sqrt{c}) + 3\operatorname{sh}(R\sqrt{c}))), \quad \beta_i = x_i - y_i.$$

Сделаем замену $\vec{W}^{m+1/2}(x) = q \cdot \vec{u}^{m+1/2}(x)$ и введем обозначение $\operatorname{div} \vec{W}^{m+1/2} = V^{m+1/2}$, $m = 0, \dots, N-1$, q – некоторый параметр, значение которого определяется позже. В новом обозначении (3.136) имеет вид

$$W_i^{m+1/2}(x) = \int_{V_R} k_1^i(x, y) W_i^{m+1/2}(y) dy + q \int_{V_R} Z_2^i(x, y) (cu_i^m(y) + f_i^m(y)/\nu) dy \quad (3.138)$$

Суммируя (3.137) по i , $i = 1, 2, 3$ в новых обозначениях, получим

$$V^{m+1/2}(x) = \int_{V_R} \sum_{i=1}^3 k_1^i(x, y) W_i^{m+1/2}(y) dy \quad (3.139)$$

$$+ q \int_{V_R} \sum_{i=1}^3 Z_2^i(x, y) (cu_i^m(y) + f_i^m(y)/\nu) dy \quad (3.140)$$

Известно, что обобщенное решение уравнения (3.132) в шаре V_R имеет вид

$$p^{m+1}(x) = -\frac{1}{4\pi\tau q} \int_{V_R} \frac{1}{r} \cdot V^{m+1/2}(y) dy. \quad (3.141)$$

Из (3.141) находим $\text{grad } p^{m+1}(x)$, а из (3.138) - $\vec{W}^{m+1/2}(x)$, и их подставим в (3.133). Тогда из (3.133) получим

$$u_i^{m+1}(x) = \frac{1}{q} \int_{V_R} k_1(x, y) W_i^{m+1/2}(y) dy + q \int_{V_R} Z_2^i(x, y) (cu_i^m(y) + f_i^m(y)/\nu) dy + \frac{1}{4\pi q} \int_{V_R} \frac{\beta_i}{r^3} \cdot V^{m+1/2}(y) dy. \quad (3.142)$$

Итак, мы получили следующую систему

$$\begin{aligned} W_i^{m+1/2}(x) &= \int_{V_R} k_1(x, y) W_i^{m+1/2}(y) dy + \int_{V_R} k_2(x, y) u_i^m(y) dy \\ &\quad + \int_{V_R} k_3(x, y) f_i^m(y) dy, \\ V^{m+1/2}(x) &= \int_{V_R} \sum_{i=1}^3 k_1^i(x, y) W_i^{m+1/2}(y) dy + \int_{V_R} \sum_{i=1}^3 k_2^i(x, y) u_i^m(y) dy + \\ &\quad + \int_{V_R} \sum_{i=1}^3 k_3^i(x, y) f_i^m(y) dy, \quad p^{m+1}(x) = \int_{V_R} k_4(x, y) V^{m+1/2}(y) dy, \\ u_i^{m+1}(x) &= \int_{V_R} k_5(x, y) W_i^{m+1/2}(y) dy + \int_{V_R} k_6(x, y) u_i^m(y) dy \\ &\quad + \int_{V_R} k_7^i(x, y) V^{m+1/2}(y) dy + \int_{V_R} k_8(x, y) f_i^m(y) dy, \end{aligned} \quad (3.143)$$

где

$$\begin{aligned} k_2(x, y) &= qcZ_2(x, y), \quad k_3(x, y) = \frac{q}{\nu} Z_2(x, y), \quad k_2^i(x, y) = qcZ_2^i(x, y), \\ k_3^i(x, y) &= \frac{q}{\nu} Z_2^i(x, y), \quad k_4(x, y) = -\frac{1}{4\pi\tau qr}, \quad k_5(x, y) = \frac{1}{q} k_1(x, y), \\ k_6(x, y) &= cZ_2(x, y), \quad k_7^i(x, y) = \frac{\beta_i}{4\pi qr^3}, \quad k_8(x, y) = \frac{1}{\nu} Z_2(x, y). \end{aligned}$$

Систему (3.143) напомним в виде

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{8N} \int_{V_R} k_{i,j}(x, y) \varphi_j(y) dy + \psi_i(x), \quad (3.144)$$

где

$$\begin{aligned}
 i, j = 1, 2, \dots, 8N, \quad \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{8N} &= (W_1^{1/2}(x), W_2^{1/2}(x), W_3^{1/2}(x), V^{1/2}(x), \\
 p^1(x), u_1^1(x), u_2^1(x), u_3^1(x), \dots, W_1^{N-1/2}(x), W_2^{N-1/2}(x), W_3^{N-1/2}(x), V^{N-1/2}(x), \\
 p^N(x), u_1^N(x), u_2^N(x), u_3^N(x))^T, \quad \{\psi_i(x)\}_{i=1}^{8N} &= \left(\int_{V_R} k_3(x, y) f_1^0(y) dy, \right. \\
 \int_{V_R} k_3(x, y) f_2^0(y) dy, \int_{V_R} k_3(x, y) f_3^0(y) dy, \int_{V_R} \sum_{i=1}^3 k_3^i(x, y) f_i^0(y) dy, 0, \\
 \int_{V_R} k_8(x, y) f_1^0(y) dy, \int_{V_R} k_8(x, y) f_2^0(y) dy, \int_{V_R} k_8(x, y) f_3^0(y) dy, \\
 \left. \dots, \int_{V_R} k_8(x, y) f_3^{N-1}(y) dy \right)^T.
 \end{aligned}$$

Ядра $k_{i,j}(x, y)$ определяются из системы (3.143).

Пусть $|V^{m+1/2}(x)| \leq M$ в Ω (в V_R) для $m = 0, \dots, N-1$ и пусть V_ε - шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x , $V_\varepsilon \subset \Omega$, ε - сколь угодно малая фиксированная величина. Тогда, учитывая свойства интеграла типа потенциала

$$I(x) = \int_{V_R} \frac{V^{m+1/2}(y)}{r^\alpha} dy \text{ и оценку } \left| \frac{\beta_i}{r^{\alpha+2}} \right| \leq \frac{1}{r^{\alpha+1}}, \quad 0 < \alpha < 3 \quad (3.145)$$

можно предположить $0 < \varepsilon \leq r \leq R$.

Лемма 3.1 Для $i = 1, 2, 3$, $l = 1, 2$ $k_l^i(x, y)$ стремятся к нулю быстрее любой степени τ при $\tau \rightarrow 0$.

Доказательство. При $\tau \rightarrow 0$ $c \rightarrow +\infty$, так как $c = 1/\tau\nu$, $\nu > 0$.

Выражая $\text{sh}(x)$ и $\text{ch}(x)$ через $\exp(x)$, получаем при $c \rightarrow +\infty$ и после несложного преобразования утверждение леммы.

Следствие 3.1 *Всегда можно выбрать τ таким, что выполнены условия*

$$\sup_{V,l,i} \left(2 \int_{V_R} |k_l(x,y)| dx + \int_{V_R} |k_l^i(x,y)| dx \right) < 1$$

$$l = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 < \varepsilon \leq |x - y| \leq R$$

Теорема 3.11 *Для системы (3.143) применим метод Монте–Карло (схема Неймана–Улама).*

Доказательство. Оценим $\|K\|_{L_1(\Omega)}$. Известно, что

$$\|K\| \leq \sup_{y,j} \sum_{i=1}^{8N} \int_{V_R} |k_{i,j}(x,y)| dx = \sup_{y,l,i} \left\{ \left(2 \int_{V_R} |k_l(x,y)| dx + \int_{V_R} |k_l^i(x,y)| dx \right), \right. \\ \left. \left(\int_{V_R} |k_4(x,y)| dx + \int_{V_R} |k_7^i(x,y)| dx \right) \right\}, \quad l = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.146)$$

Используя оценки $\int_{V_R} \frac{dx}{r^\alpha} \leq c_\alpha R^{3-\alpha}$ (3.145) получим

$$\sup_{y,i} \left\{ \int_{V_R} |k_4(x,y)| dx + \int_{V_R} |k_7^i(x,y)| dx \right\} \leq \frac{c_1}{4\pi\tau q} R^2 + \frac{c_2}{4\pi q} R,$$

где c_1 и c_2 – некоторые постоянные. Теперь, если выбрать $q > R_{\max}$

$(c_1 R_{\max}/\tau + c_2)/4\pi$ и в силу следствия можно выбрать τ таким, что

выполнено условие $\|K\|_{L_1(\Omega)} < 1$; здесь R_{\max} – точная верхняя граница

радиусов сфер, целиком лежащих в Ω .

Теорема 3.11 доказана.

Систему интегральных уравнений (3.143) можно решить "блужданием по шарам".

3.8 Решение граничных интегральных уравнений

3.8.1 Постановка задачи.

Пусть объем $V(t)$, заполненный движущейся жидкостью, ограничен замкнутой гладкой поверхностью $S(t)$. Предположим, что во все моменты времени $t \geq t_0$ к поверхности $S(t)$ примыкают одни и те же частицы жидкости. Это определено в двух случаях:

- 1) поверхность $S(t)$ образована некоторым внешним материальным телом и жидкость полностью прилипает к поверхности $S(t)$;
- 2) $S(t)$ – свободная поверхность жидкости и на ней действует поверхностное натяжение, которое удерживает на $S(t)$ одни и те же частицы жидкости.

Теперь введем некоторые обозначения:

$\vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{e}^k F_k \equiv \sum_{k=1}^3 \vec{e}^k F_k$ – плотность объемных сил, которую мы предполагаем заданной функцией времени t и радиус-вектора $\vec{x} = \vec{e}^k x_k$ произвольной точки M сплошной среды, заполняющей некоторый пространственный объем V . При этом x_1, x_2, x_3 – декартовы прямоугольные координаты точки M и $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ – единичные орты в неподвижной координатной системе $0x_1, x_2, x_3$. $\vec{v}(\vec{x}, t)$ – скорость частицы M в момент времени t . Скалярная величина $P(\vec{x}, t) = -\frac{1}{3}(P_{11} + P_{22} + P_{33})$ является линейным инвариантом тензора напряжений и называется объемным гидродинамическим давлением. Коэффициент μ представляет собой физическую характеристику реальной жидкости, называемую динамическим коэффициентом вязкости или просто вязкостью. Его размерность $[\mu] = \text{сила}/(\text{скорость} \times \text{длина})$. γ – постоянная массовая плотность сплошной среды. Отношение вязкости к плотности называется кинематической вязкостью и имеет размерность: $\text{скорость} \times \text{длина} = \text{длина}^2/\text{время}$.

Уравнение несжимаемой жидкости:

$$\text{div } \vec{v} \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (3.147)$$

Векторное дифференциальное уравнение движения:

$$\mu \Delta \vec{v} - \gamma \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \gamma (\vec{v}, \text{grad}) \vec{v} - \text{grad } p + \vec{F}(\vec{x}, t) = 0, \quad (3.148)$$

где

$$\Delta \equiv \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

Дифференциальные уравнения (3.147) и (3.148) относительно векторной функции $\vec{v}(\vec{x}, t)$ и скалярной функции $P(\vec{x}, t)$ в совокупности называются дифференциальными уравнениями Навье–Стокса или полными уравнениями Навье–Стокса. Полное уравнение Навье–Стокса записывается в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma_0} \Delta \vec{v} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - (\vec{v}, \text{grad}) \vec{v} + \text{grad } p + \vec{F} \\ \text{div } \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (3.149)$$

где $\gamma_0 \equiv Re$ – число Рейнольдса. В некоторых предположениях $\gamma_0 = \frac{\gamma}{\mu}$.

Начально–краевые задачи для полных уравнений Навье–Стокса.

Описание изменения с течением времени поверхности $S(t)$ производится по методу Лагранжа. Если частица жидкости M в заданный момент времени $t = t_0$ занимала положение $M_0 \in S(t_0)$ и имела декартовы координаты x_1^0, x_2^0, x_3^0 , то в другие моменты времени $t > t_0$ она будет иметь другие координаты, зависящие от t и от x_1^0, x_2^0, x_3^0 :

$$x_k = g_k(t; x_1^0, x_2^0, x_3^0) \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.150)$$

При известных функциях (3.150) можно проследить за движением произвольной жидкой частицы $M \in S(t)$ во все моменты времени.

Начальную поверхность $S(t_0)$ будем считать объединением $\bigcup_{i=1}^n S_i(t_0)$ конечного числа n элементарных поверхностей $S_i(t_0)$, каждую из которых можно задать векторным двухпараметрическим уравнением:

$$\vec{x}_0 \equiv \vec{e}^k x_k^0 = \vec{e}^k \varphi_k^i(\alpha_1, \alpha_2) \in S_i(t_0), \quad (3.151)$$

где (α_1, α_2) – криволинейные координаты на поверхности $S_i(t_0)$; их можно рассматривать как декартовы координаты произвольной точки A в некоторой заданной области G_i на вспомогательной плоскости. Подставляя (3.151) в (3.150), приходим к векторным уравнениям

$$\vec{x} \equiv \vec{e}^k x_k = \vec{e}^k \xi_k^i(\alpha_1, \alpha_2, t) \in S_i(t), \quad (3.152)$$

описывающим движение поверхности $S(t)$ в переменных Лагранжа (α_1, α_2, t) .

Функции (3.152) связаны со скоростями $\vec{v}(\vec{x}, t)$, определенными из уравнений Навье–Стокса предельным переходом от точек объема V на

его границу $S(t)$, кинематическим соотношением

$$e^{*k} \frac{\partial \xi_k(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} = \vec{v}(\vec{x}, t). \quad (3.153)$$

Векторные функции

$$\vec{x}_{\alpha_j} = e^{*k} \frac{\partial \xi_k(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2) \quad (3.154)$$

в начальный момент времени $t = t_0$ удовлетворяют условию гладкой поверхности S :

$$[\vec{x}_{\alpha_1}, \vec{x}_{\alpha_2}] \neq 0. \quad (3.155)$$

Это неравенство сохраняется в том случае непрерывных функций (3.154), в некотором конечном интервале времени $t_0 < t < t_0 + T$.

Вектор

$$\vec{n} = \pm [\vec{x}_{\alpha_1}, \vec{x}_{\alpha_2}] / |[\vec{x}_{\alpha_1}, \vec{x}_{\alpha_2}]| \quad (3.156)$$

направлен в пространстве $Ox_1x_2x_3$ по нормали к поверхности $S(t)$; из обоих возможных знаков (\pm) выберем тот знак при котором нормаль \vec{n} является внешней по отношению к объему $V(t)$.

Элемент площади на поверхности $S(t)$ определяется по формуле

$$ds = |[\vec{x}_{\alpha_1}, \vec{x}_{\alpha_2}]| d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (3.157)$$

Если \vec{p}_n – вектор напряжений на площадке $d\vec{S} = \vec{n} ds$, то

$$\vec{p} = e^{-j} p_{i,j} \cos(n, x_i), \quad (3.158)$$

и на основании закона Ньютона–Стокса имеем равенство

$$\vec{p}_n = -\vec{n} p + \mu^* e^{-j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \cos(n, x_i) \quad (3.159)$$

(по дважды встречающимся индексам производится суммирование); здесь

$$\mu^* = \frac{1}{Re} \equiv \frac{1}{\gamma_0}.$$

Для нестационарных потоков жидкости во всех практических задачах предполагается известным в некоторый начальный момент времени $t = t_0$ поле скоростей

$$\vec{v}(\vec{x}, t_0) = \vec{w}(\vec{x}), \quad (3.160)$$

где $\vec{w}(\vec{x})$ – заданная векторная непрерывная функция ($\vec{x} \in V(t_0)$). Для стационарных потоков предполагается $-\infty < t < +\infty$ и, в силу независимости решений уравнения Навье–Стокса от времени t , никаких начальных условий не требуется.

Возможные задачи гидродинамики различаются по характеру условий на граничной поверхности $S(t)$. Мы будем рассматривать перечисленные ниже задачи для нестационарных гидродинамических потоков.

Задача 3.10 *На поверхности $S(t)$, определенной при $t \geq t_0$ заданными функциями (3.152), известны скорости частиц жидкости*

$$\vec{v}(\vec{x}, t)|_{\vec{x} \in S(t)} = \vec{u}(\alpha_1, \alpha_2, t). \quad (3.161)$$

Здесь заданная вектор–функция \vec{u} должна быть согласована с условием несжимаемости жидкости; для этого необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} dV \equiv \int \int_{S(t)} (\vec{n}, \vec{u}) dS = 0$$

Если жидкость полностью прилипает к поверхности $S(t)$, то равенство (3.161) равносильно практическому соотношению (3.153) и следовательно

$$\vec{u}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \vec{e}^* \frac{\partial \xi_k(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} \quad (3.162)$$

Заданное движение поверхности $S(t)$ в данном случае должно удовлетворять требованию

$$\int \int_{S(t)} \left(\vec{n}, \vec{e}^* \frac{\partial \xi_k}{\partial t} \right) dS = 0 \quad (3.163)$$

Заметим, что в Задаче 3.10 функция $\vec{u}(\alpha_1, \alpha_2, t)$ не всегда имеет выражение (3.152). В общей математической постановке в граничном условии Задачи 3.10 под $\vec{u}(\alpha_1, \alpha_2, t)$ можно понимать произвольно заданную векторную функцию.

Задача 3.11 *На поверхности $S(t)$ заданы напряжения $\vec{p}_n(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и, кроме того, действуют силы поверхностного натяжения; в начальный момент времени $t = t_0$ поверхность $S(t_0)$ задана и известно начальное распределение скоростей (3.160). Требуется определить на основе дифференциальных уравнений (3.149) при $t > t_0$ функции $\{\vec{v}(\vec{x}, t), p(\vec{x}, t)\}$ и закон изменения поверхности $S(t)$. Таким образом, в Задаче 3.11 имеем для решения уравнений (3.149) на подвижной границе $S(t)$ два векторных условия: кинематическое условие (3.153) и динамическое условие*

$$-\vec{n} \cdot p + \mu^* \vec{e}^j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \cos(n, x_i) = \vec{p}_n - \vec{n} \cdot \alpha \cdot R(\vec{x}, t).$$

Здесь $\alpha = \frac{\sigma}{\gamma u^2}$. Эту задачу в дальнейшем будем называть задачей со свободной границей.

3.8.2 Гидродинамический потенциал для плоских течений.

Запишем уравнение Навье–Стокса (3.149) для случая плоских нестационарных течений в виде:

$$\frac{1}{\gamma_0} \Delta \vec{v} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \text{grad } p + \vec{f}(\vec{x}, t; \vec{v}) = 0, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (3.164)$$

где

$$\vec{x} = \vec{e}^1 x_1 + \vec{e}^2 x_2, \quad \Delta \equiv \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

$$\vec{f} \equiv \vec{e}^1 \left[F_1(\vec{x}, t) - \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right] + \vec{e}^2 \left[F_2(\vec{x}, t) - \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right]. \quad (3.165)$$

Будем рассматривать уравнения (3.164) формально как линейные дифференциалы уравнения, в которых \vec{f} является неопределенной сложной функцией переменных $t > 0$ и $\vec{x} \in D(t)$. ($D(t)$ - область на плоскости прямоугольных декартовых координат x_1, x_2).

Рассмотрим уравнение (3.164) для значений \vec{x} в конечной области D , ограниченной гладким подвижным контуром L , при $t > 0$ и нулевой начальной скорости $\vec{v}(\vec{x}, 0) \equiv \vec{0}$, применимо к этим уравнениям преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma_0} \int_0^\infty e^{-\xi t/\gamma_0} \vec{v}(\vec{x}, t) dt = \vec{v}(\vec{x}, \xi) \equiv e^{-k} V_k, \\ \int_0^\infty e^{-\xi t/\gamma_0} \vec{f}^*(\vec{x}, t) dt = \vec{F}(\vec{x}, \xi) \equiv e^{-k} F_k, \\ \int_0^\infty e^{-\xi t/\gamma_0} p(\vec{x}, t) dt = P(\vec{x}, \xi) \end{cases} \quad (3.166)$$

При этом $\xi = \sigma + i\tau$ и $\sigma \geq \sigma_0 = \text{const}$; предполагается, что непрерывные функции $\{\vec{v}, \vec{f}^*, p(\vec{x}, t)\}$ в каждой точке $\vec{x} \in D$ удовлетворяют условию вида

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma_0 t} p(\vec{x}, t) = 0$$

Получаем уравнения

$$\Delta \vec{v} - \xi \vec{v} - \text{grad } P + \vec{F} = \vec{0}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad \vec{x} \in D \quad (3.167)$$

Уравнения для определения напряжения также подвергается преобразованию Лапласа по времени:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\xi t/\gamma_0} p_{jk}(\vec{x}, t) dt &= P_{jk}(\vec{x}, \xi), \quad (j, k \in \{1, 2\}) \\ \int_0^\infty e^{-\xi t/\gamma_0} \vec{p}_n(\vec{x}, t) dt &= \vec{P}_n(\vec{x}, \xi). \end{aligned}$$

При этом получаем соотношения:

$$\begin{cases} P_{11} = -P + 2\frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \\ P_{12} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}, \\ P_{22} = -P + 2\frac{\partial V_2}{\partial x_2}; \end{cases} \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} \vec{P} = & -P\vec{n} + \vec{e}^1 \left[\cos(n^\wedge x_1) \cdot 2\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \cos(n^\wedge x_2) \cdot \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) \right] + \\ & + \vec{e}^2 \left[\cos(n^\wedge x_1) \cdot \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) \cos(n^\wedge x_2) \cdot 2\frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right]. \end{aligned} \quad (3.169)$$

При любой дифференцируемой функции $\vec{U}(\vec{x}) = \vec{e}^k U_k$, в силу уравнений (3.167) справедлива первая интегральная формула Грина

$$\begin{aligned} \int_L (\vec{P}_n, \vec{U}) ds = & \int \int_D \{ \vec{U}, -F + \xi \vec{\nu} - P \operatorname{div} \vec{U} \} dx_1 dx_2 + \\ & + \int \int_D \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 + \\ & + 2 \int \int_D \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.170)$$

здесь ds – дифференциал длины дуги контура L .

Пусть векторная функция $\vec{u}(\vec{x}, \xi) = \vec{e}^k U_k$ удовлетворяет в области D уравнениям

$$\Delta \vec{U} - \xi \vec{U} - \operatorname{grad} Q + \vec{\Phi}(\vec{x}, \xi) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{U} = 0. \quad (3.171)$$

Через \vec{Q}_n обозначим вектор, отнесенный к площадке контура L с нормалью \vec{n} , вычисляемый по формулам вида (3.169) путем замены в их правых частях P на Q и V_k на U_k . Подставим указанную функцию $\vec{U}(\vec{x}, \xi)$ в формулу (3.170) и затем выпишем аналогичную формулу, меняя ролями \vec{V} и \vec{U} , \vec{F} и $\vec{\Phi}$, \vec{P}_n и \vec{Q}_n . Из этих двух интегральных соотношений следует новое соотношение

$$\int_L \{ (\vec{P}_n, \vec{U}) - (\vec{Q}_n, \vec{V}) \} ds = \int \int_D \{ (\vec{V}, \vec{\Phi}) - (\vec{U}, \vec{F}) \} dx_1, dx_2, \quad (3.172)$$

которое мы будем называть формулой Грина для уравнений (3.167) и (3.171).

Из формулы Грина (3.172) после несложных преобразований получаем интегральное представление (интегральное уравнение) для вектора $\vec{V}(\vec{y}, \xi)$ в фиксированной точке \vec{y} в области D .

$$2\pi\vec{V}(\vec{y}, \xi) = -\text{rot rot} \left\{ \int \int_D \vec{F}(\vec{x}, \xi)\Omega(r, \xi)dx_1dx_2 + \int_L \left[\vec{P}_n(\vec{x}, \xi)\Omega(r, \xi) - \vec{V}(\vec{x}, \xi)\frac{\partial\Omega}{\partial n} \right] ds \right\} - \text{grad} \int_L (\vec{V}(\vec{x}, \xi), \vec{n}) \ln r ds \quad (3.173)$$

$$- \text{rot } \vec{e}^3 \int_L \left(\vec{V}(\vec{x}, \xi), \text{grad}_y \frac{\partial\Omega}{\partial s} \right) ds,$$

где

$$\Omega(r, \xi) = \frac{1}{\xi} [\ln r + K_0(r\sqrt{\xi})], \quad r = |\vec{x} - \vec{y}|, \quad x_1 - y_1 = r \cos \theta, \quad x_2 - y_2 = r \sin \theta$$

Формула (3.173) дает интегральное представление вектора $\vec{V}(\vec{y}, \xi)$ для всех $\vec{y} \in D$ через контурные значения и значения вектора "напряжений" $\vec{P}_n(\vec{x}, \xi)$. Подставляя функцию (3.173) в уравнение (3.167) (заменяв в них переменную \vec{x} на \vec{y}) из (3.167) получаем (с точностью до слагаемого, не зависящего от \vec{y}) интегральное представление функции $\vec{P}(\vec{y}, \xi)$:

$$2\pi\vec{P}(\vec{y}, \xi) = \text{div} \left\{ \int \int_D \vec{F}(\vec{x}, \xi) \ln r dx_1 dx_2 + \int_L \left[\vec{P}_n(\vec{x}, \xi) \ln r - \vec{V}(\vec{x}, \xi) \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right] ds \right\} + \xi \int_L (\vec{V}(\vec{x}, \xi), \vec{n}) \ln r ds - \left(\vec{e}^3, \text{rot} \int_L \vec{V}(\vec{x}, \xi) \frac{\partial \ln r}{\partial s} ds \right). \quad (3.174)$$

Здесь

$$\left(\vec{e}^3, \text{rot} \int_L \vec{V}(\vec{x}, \xi) \frac{\partial \ln r}{\partial s} ds \right) \equiv \text{div}_y \vec{V}(\vec{x}, \xi) \frac{\partial \ln r}{\partial n}$$

В работе [8] исследованы функции $\Omega(r, \xi)$ при малых значениях r и больших $|\xi|$.

Потенциалы для уравнения (3.167).

Пусть $\vec{\nu}(s), \vec{\mu}(s)$ – произвольно заданные векторные функции длины дуги s контура L . Введем в рассмотрение функции $\{\vec{V}^k(\vec{y}), P^k(\vec{y})\}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) вида:

$$\vec{V}^0(\vec{y}|\vec{F}) = -\text{rot rot} \int \int_D \vec{F}(\vec{x}, \xi)\Omega(r, \xi)dx_1dx_2,$$

$$\begin{aligned}
P^0(\vec{y}|\vec{F}) &= \operatorname{div} \int \int_D \vec{F}(\vec{x}, \xi) \ln r dx_1 dx_2, \\
\vec{V}^1(\vec{y}|\vec{\nu}) &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \int_L \vec{\nu}(s) \Omega(r, \xi) ds, \\
P^1(\vec{y}|\vec{\nu}) &= \operatorname{div} \int \int_D \vec{\nu}(s) \ln r ds, \\
\vec{V}^2(\vec{y}|\vec{\mu}) &= -\operatorname{grad} \int_L (\vec{\mu}, \vec{n}) \ln r ds, \\
P^2(\vec{y}|\vec{\mu}) &= \xi \int_L (\vec{\mu}, \vec{n}) \ln r ds, \\
\vec{V}^3(\vec{y}|\mu) &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_L \vec{\mu}(s) \frac{\partial \Omega}{\partial n} ds, \\
P^3(\vec{y}|\vec{\mu}) &= -\operatorname{div} \int_L \vec{\mu}(s) \frac{\partial \ln r}{\partial n} ds, \\
\vec{V}^4(\vec{y}|\vec{\mu}) &= -\operatorname{rot} e^{\mathfrak{z}} \int_L \left(\vec{\mu}(s), \operatorname{grad}_y \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) ds, \\
P^4(\vec{y}|\vec{\mu}) &= -\operatorname{rot} \left(\int_L \vec{\mu}(s) \frac{\partial \ln r}{\partial s} ds, e^{\mathfrak{z}} \right)
\end{aligned} \tag{3.175}$$

Функции $\{\vec{V}^0(\vec{y}|\vec{F}), P^0(\vec{y}|\vec{F})\}$ получаются из функции ([8], (2.44)) путем преобразования Лапласа и перемены ролей точек \vec{x} и \vec{y} . Поэтому ясно, что данные функции определяют частное решение неоднородных уравнений (3.167) в области D .

Каждая пара функций $\{\vec{V}^k(\vec{y}), P^k(y)\}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) удовлетворяет однородным дифференциальным уравнениям (при $\vec{F} \equiv 0$) вида (3.167), если $\vec{y} \notin L$. Для исследования поведения этих функций при $\vec{y} \rightarrow \vec{x}_0 \in L$ представляется целесообразным ввести в рассмотрение кроме основной неподвижной декартовой системы координат $0x_1x_2$ еще две координатные системы: $N_0n_0s_0$ и Nns (рисунок 1). Предполагается, что декартовые координаты x_1x_2 точки $N \in L$ заданы как функции длины дуги s :

$$x_1 = x_1(s), \quad x_2 = x_2(s); \tag{3.176}$$

Эти функции имеют период l (l - длина контура L) и непрерывно дифференцируемы, причем

$$[x_1'(s)]^2 + [x_2'(s)]^2 \equiv 1$$

Ось ординат Ns направлена по касательной к контуру L в сторону положительного направления движения вдоль L (когда область D остается слева по ходу движения), и ось абсцисс Nn направлена в сторону внешней нормали к

контур L в точке N . Координатные декартовы оси $N_0 n_0 s_0$ получаются как частный случай подвижных осей Nns при совпадении точки N фиксированной точкой $N_0 \in L$.

Через r обозначим расстояние MN . Имеем соотношения:

$$x_1(s) - y_1 = r \cos \theta, \quad x_2(s) - y_2 = r \sin \theta.$$

Угол θ указан на рисунке 1. Через \vec{n} , \vec{s} и \vec{n}_0 , \vec{s}_0 будем обозначать единичные векторы нормали и касательной к контуру L в точках N и N_0 соответственно.

При последующих выкладках будем использовать геометрические соотношения

$$\begin{aligned} x_1'(s) &= -\sin(n^\wedge x_1), \quad x_2'(s) = \cos(n^\wedge x_1) \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} &= \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin \theta, \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= \cos \omega, \quad \frac{\partial r}{\partial s} = \sin \omega. \end{aligned}$$

В этих соотношениях r рассматривается как функция точки \vec{x} (при фиксированной точке \vec{y}), $\omega = (\vec{r}^\wedge \vec{n})$ и векторный отрезок $\vec{r} = \overline{MN}$ предполагается направленным от точки M к точке N . Через ω_0 обозначим угол под которым наклонен векторный отрезок \vec{r} к векторному отрезку \vec{n}_0 : $\omega_0 = (\vec{r}^\wedge \vec{n}_0)$. Предполагая \vec{x} фиксированной точкой и \vec{y} – переменной точкой на плоскости, вычислим производные по направлениям \vec{n}_0 и \vec{s}_0 от функций r , $\cos \omega$, $\cos \omega_0$, $\sin \omega_0$. Выпишем соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial n_0} &= -\cos \omega_0, \quad \frac{\partial r}{\partial s_0} = -\sin \omega_0, \\ \frac{r \partial \cos \omega}{\partial n_0} &= -\sin \omega_0 \sin \omega, \quad \frac{r \partial \sin \omega}{\partial n_0} = \sin \omega_0 \cos \omega, \\ \frac{r \partial \cos \omega}{\partial s_0} &= \cos \omega_0 \sin \omega, \quad \frac{r \partial \sin \omega}{\partial s_0} = -\cos \omega_0 \cos \omega, \\ \frac{r \partial \cos \omega_0}{\partial n_0} &= -\sin^2 \omega_0, \quad \frac{2r \partial \sin \omega_0}{\partial n_0} = \sin 2\omega_0, \\ \frac{2r \partial \cos \omega_0}{\partial s_0} &= \sin 2\omega_0, \quad \frac{r \partial \sin \omega_0}{\partial s_0} = -\cos^2 \omega_0. \end{aligned} \tag{3.177}$$

Допустим, что периодические функции $\vec{\mu}(s)$, $\vec{\nu}(s)$ удовлетворяют условию Гельдера: существуют такие постоянные $H_\mu > 0$, $H_\nu > 0$, $\alpha_\mu \in (0; 1]$, $\alpha_\nu \in (0; 1]$, что для любых значений s_1, s_2 выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\vec{\mu}(s_1) - \vec{\mu}(s_2)| &\leq H_\mu |s_1 - s_2|^{\alpha_\mu} \\ |\vec{\nu}(s_1) - \vec{\nu}(s_2)| &\leq H_\nu |s_1 - s_2|^{\alpha_\nu}. \end{aligned} \tag{3.178}$$

Будем использовать обозначения

$$\begin{aligned}\nu_1(s) &= (\vec{\nu}(s), \vec{n}), \quad \nu_2(s) = (\vec{\nu}(s), \vec{s}), \\ \mu_1(s) &= (\vec{\mu}(s), \vec{n}), \quad \mu_2(s) = (\vec{\mu}(s), \vec{s}).\end{aligned}\quad (3.179)$$

Функции $\vec{V}^1(\vec{y}|\vec{\nu})$, $\vec{P}^1(\vec{y}|\vec{\nu})$ называются потенциалами простого слоя с контурной плотностью $\vec{\nu}(s)$, соответствующим дифференциальным уравнениям (3.167).

Выражения для граничных значений каждого из трех решений $\{\vec{V}^k(\vec{y}|\vec{\nu}), \vec{P}^k(\vec{y}|\vec{\nu})\}$ ($k = 2, 3, 4$) однородных уравнений вида (3.167) содержит сингулярности; однако в следующих комбинациях данных функций:

$$\tilde{V}(\vec{y}|\vec{\nu}) = \sum_{k=2}^4 \vec{V}^k(\vec{y}|\vec{\nu}), \quad \tilde{P}(\vec{y}|\vec{\nu}) = \sum_{k=2}^4 P^k(\vec{y}|\vec{\nu}) \quad (3.180)$$

сингулярности в граничном интегральном выражении скоростей исчезают. Эти функции будем называть потенциалами двойного слоя с контурной плотностью $\vec{\mu}(s)$, соответствующими дифференциальным уравнениям (3.167).

3.8.3 Построение граничных интегральных уравнений

Для построения граничных интегральных уравнений для Задач 3.10 и 10* и для применения преобразования Лапласа к краевым задачам для уравнений (3.164) существенно важно, чтобы контур L плоской области D был неподвижным. Поэтому для уравнений (3.167) имеют физический смысл краевые задачи такого типа, как в задаче 3.10, и физически не обоснована краевая задача с заданными на контуре L комплекснозначными значениями \vec{P}_n вида (3.169). Однако, в дальнейшем такая задача (назовем ее задачей 10* нам встретится как вспомогательная математическая задача.

Решение основных краевых задач для системы дифференциальных уравнений (3.167) на практике можно осуществлять путем сведения к одномерным интегральным уравнениям. Так как задачи линейны и частное решение неоднородных уравнений (3.167) находится в виде $\{\vec{V}^0(\vec{y}), \vec{P}^0(\vec{y})\}$ (по первым двум из выражений (3.175)), то в принципе достаточно ограничиться рассмотрением случая $\vec{F}(\vec{y}) \equiv \vec{0}$. Задача 3.10 заключается в отыскании решения уравнения (3.167) в области D при заданной векторной функции $\vec{V}(\vec{x}_0)$ ($\vec{x}_0 \in L$). Уравнения (3.167) удовлетворяются при любых плотностях $\{\mu_1(s), \mu_2(s)\}$. Для этих плотностей получаем систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

В задаче 10* на заданном контуре L задается вектор $\vec{P}_{n_0}(\vec{x}_0)$, и решение этой задачи можно искать в виде $\{\vec{V}^1(\vec{y}), \vec{P}^1(\vec{y})\}$. В этом случае получаем систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода для неизвестных плотностей $\{\nu_1(s), \nu_2(s)\}$.

Прежде, чем выписать явный вид рассматриваемых двух систем граничных интегральных уравнений, обратимся к выражениям их ядер и отметим соотношения

$$K_{mj}(s, s_0) \equiv K_{mj}^{(2)}(s, s_0) = -K_{jm}^{(1)}(s_0, s), \quad (m, j = 1, 2; 0 \leq s, s_0 \leq a) \quad (3.181)$$

где

$$K_{11}^{(1)} = \frac{\cos \omega}{r} - \frac{2}{r} \Omega^*(r, \xi) \cos(\omega + 2\omega_0) + \left[\frac{1}{r} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \cdot \sin \omega \sin 2\omega_0,$$

$$K_{12}^{(1)} = \frac{\sin \omega}{r} - \frac{2}{r} \Omega^*(r, \xi) \sin(\omega + 2\omega_0) + \left[\frac{1}{r} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \cdot \cos \omega \sin 2\omega_0,$$

$$K_{21}^{(1)} = -\frac{2}{r} \Omega^*(r, \xi) \sin(\omega + 2\omega_0) + \left[\frac{1}{r} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \cdot \sin \omega \cos 2\omega_0,$$

$$K_{22}^{(1)} = \frac{2}{r} \Omega^*(r, \xi) \cos(\omega + 2\omega_0) + \left[\frac{1}{r} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \cdot \cos \omega \cos 2\omega_0,$$

$$\tilde{K}_{11} = \frac{\cos \theta}{r} - \frac{2}{r} \Omega^*(r, \xi) \cos(\theta + 2\omega) + \left[\frac{1}{r} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \cdot \sin \theta \sin 2\omega,$$

$$\tilde{K}_{12} = -\frac{2}{r} \Omega^*(r, \xi) \sin(\theta + 2\omega) - \left[\frac{1}{r} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \cdot \sin \theta \cos 2\omega,$$

$$\tilde{K}_{21} = \frac{\sin \theta}{r} - \frac{2}{r} \Omega^*(r, \xi) \sin(\theta + 2\omega) - \left[\frac{1}{r} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \cdot \cos \theta \sin 2\omega,$$

$$\tilde{K}_{22} = \frac{2}{r} \Omega^*(r, \xi) \cos(\theta + 2\omega) + \left[\frac{1}{r} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \cdot \cos \theta \cos 2\omega,$$

$$K_{jq}^2(s, s_0) = \tilde{K}_{jq} \Big|_{\substack{\theta=\omega_0 \\ \vec{y}=\vec{x} \in L}} \quad (j, q = 1, 2).$$

Если контур L имеет непрерывную кривизну, то ядра (3.181) непрерывны.

Введя матричные функции

$$A(s, s_0) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{M}(s) = \begin{pmatrix} \mu_1(s) \\ \mu_2(s) \end{pmatrix}, \quad \vec{N}(s) = \begin{pmatrix} \nu_1(s) \\ \nu_2(s) \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}^{(1)}(s_0) = \begin{pmatrix} \vec{V}(\vec{x}_0, \vec{n}_0) \\ \vec{V}(\vec{x}_0, \vec{s}_0) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}^{(2)}(s_0) = \begin{pmatrix} \vec{P}_{n_0}, \vec{n}_0 \\ \vec{P}_{s_0}, \vec{s}_0 \end{pmatrix}, \quad (3.182)$$

имеем следующие граничные интегральные уравнения:
для Задачи 3.10

$$\pm \pi \vec{M}(s_0) - \int_L A(s, s_0) \vec{M}(s) ds = \vec{F}^{(1)}(s_0) \quad (3.183)$$

для Задачи 10*:

$$\pm \pi \vec{N}(s_0) - \int_L A^*(s, s_0) \vec{N}(s) ds = \vec{F}^{(2)}(s_0) \quad (3.184)$$

Здесь A^* – матрица, транспонированная из матрицы A , коэффициент $+\pi$ соответствует внутренней краевой задаче (для области D^+ внутри замкнутого простого гладкого контура L) и коэффициент $-\pi$ отвечает внешней краевой задаче (для области D^- , содержащей бесконечно удаленную точку плоскости (x_1, x_2)).

Уравнения (3.183) и (3.184) в векторном комплексном гильбертовом пространстве $L_2(0, a)$ при предположении, что все функции имеют период a по s и s_0 , имеют единственные решения $\vec{M}(s)$ и $N(s)$ при любой заданной функции $\vec{F}^{(j)}(s) \in L_2(0, a)$ ($j = 1, 2$) (из альтернативы Фредгольма).

Граничные интегральные уравнения для линеаризованных стационарных задач.

Плоские стационарные течения в случае линеаризации по Стоксу описываются дифференциальными уравнениями (3.167), в которых параметр $\xi = 0$ и все рассматриваемые функции вещественны. Граничные интегральные уравнения для Задач 3.10 и 10* сохраняются в виде (3.183) и (3.184).

Остается справедливой теорема единственности решения внутренней Задачи 3.10. Для внутренней Задачи 10* из равенства

$$\int \int_D \left\{ \xi \left| \vec{\hat{V}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial x_1} \right|^2 + 2 \left[\left| \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial x_2} \right|^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 = 0$$

при $\xi = 0$ получаем

$$\vec{\hat{V}}(\vec{x}) = \vec{i}_\theta |\vec{x}| \Gamma + \vec{e}^1 c_1 + \vec{e}^2 c_2, \quad \hat{P}(\vec{x}) = c_0, \quad (3.185)$$

где c_0, c_1, c_2, Γ - произвольные вещественные постоянные. Таким образом, решение внутренней стационарной Задачи 10* не единственно, а определяется с аддитивными произвольными величинами вида (3.185).

Плоские стационарные задачи существенно отличаются от нестационарных поведением общих решений в окрестностях бесконечно удаленной точки. При $\xi = 0$ нужно искать специальные способы анализа разрешимости граничных интегральных уравнений типа (3.183), (3.184), отличных от примененных выше для $\xi \neq 0$.

При $\xi = 0$ имеем следующие ядра интегральных уравнений (3.183):

$$\begin{aligned} K_{11}(s, s_0) &= \frac{2}{r} \cos \omega_0 \cos^2 \omega, \quad K_{12}(s, s_0) = \frac{1}{r} \cos \omega_0 \sin 2\omega \\ K_{21}(s, s_0) &= \frac{2}{r} \sin \omega_0 \cos^2 \omega, \quad K_{22}(s, s_0) = \frac{1}{r} \sin \omega_0 \sin 2\omega. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Если положим

$$\vec{M}(s) = \vec{e}^1 p_1(s) + \vec{e}^2 p_2(s) \quad (3.187)$$

и учтем равенство $\frac{\cos \omega}{r} = \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s}$ (смысл угла θ ясен из рисунка 2, где нужно принять точку $M = N_0 \in L$), то уравнения (3.183) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \pm \pi p_1(s_0) + \int_L \{p_1(s)(1 + \cos 2\theta) + p_2(s) \sin 2\theta\} \frac{\partial \theta}{\partial s} ds &= (\vec{V}(\vec{x}_0), \vec{e}^1), \\ \pm \pi p_2(s_0) + \int_L \{p_1(s) \sin 2\theta + p_2(s)(1 - \cos 2\theta)\} \frac{\partial \theta}{\partial s} ds &= (\vec{V}(\vec{x}_0), \vec{e}^2), \end{aligned} \quad (3.188)$$

Ядра интегральных уравнений (3.184) при $\xi = 0$ вычисляются по

формулам

$$\begin{aligned}
 K_{11}^*(s, s_0) &= K_{11}(s, s_0) = \frac{2}{r} \cos \omega \cos^2 \omega_0, \\
 K_{12}^*(s, s_0) &= K_{21}(s, s_0) = \frac{2}{r} \sin \omega \cos^2 \omega_0, \\
 K_{21}^*(s, s_0) &= K_{12}(s, s_0) = \frac{1}{r} \cos \omega \sin 2\omega_0, \\
 K_{22}^*(s, s_0) &= K_{22}(s, s_0) = \frac{1}{r} \sin \omega \sin 2\omega_0,
 \end{aligned} \tag{3.189}$$

Полагая

$$\vec{N}(s) = \vec{e}^1 q_1(s) + \vec{e}^2 q_2(s) \tag{3.190}$$

учитывая равенство $\frac{\cos \omega_0}{r} = \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s}$, можем записать уравнение (3.184) в виде

$$\begin{aligned}
 \pm \pi q_1(s_0) - \int_L \{q_1(s)(1 + \cos 2\theta) + q_2(s) \sin 2\theta\} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s} ds &= (\vec{P}_{n_0}, \vec{e}^1), \\
 \pm \pi q_2(s_0) - \int_L \{q_1(s) \sin 2\theta + q_2(s)(1 - \cos 2\theta)\} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s} ds &= (\vec{P}_{n_0}, \vec{e}^2).
 \end{aligned} \tag{3.191}$$

Отметим, что функции $\cos 2\theta(s, s_0) \equiv \cos 2\theta(s_0, s)$, $\sin 2\theta(s, s_0) \equiv \sin 2\theta(s_0, s)$ непрерывны и справедливы равенства

$$-\sin 2\theta \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_0} \cos 2\theta, \quad \cos 2\theta \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_0} \sin 2\theta.$$

Кроме того отметим равенства

$$|\theta(s, s_0) - \theta(s_0, s)| = \pi, \quad \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s_0} = \frac{\partial \theta(s_0, s)}{\partial s_0}$$

(последняя производная – непрерывная функция от s и s_0 , имеющая период a по каждой из этих двух независимых переменных).

16.076.064.001 10.080.074.010 22.0110.020.0108.0108.0108.020.0106.0 20.010

Выпишем однородные уравнения, союзные с уравнениями (3.188) и (3.191):

$$\begin{aligned} \pm \pi p_1^*(s_0) + \int_L \{p_1^*(s)(1 + \cos 2\theta) + p_2^*(s) \sin 2\theta\} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s_0} ds &= 0 \\ \pm \pi p_2^*(s_0) + \int_L \{p_1^*(s) \sin 2\theta + p_2^*(s)(1 - \cos 2\theta)\} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s_0} ds &= 0 \quad (3.192) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pm \pi q_1^*(s_0) - \int_L \{q_1^*(s)(1 + \cos 2\theta) + q_2^*(s) \sin 2\theta\} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s} ds &= 0 \\ \pm \pi q_2^*(s_0) - \int_L \{q_1^*(s) \sin 2\theta + q_2^*(s)(1 - \cos 2\theta)\} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s} ds &= 0. \quad (3.193) \end{aligned}$$

Внешняя Задача 3.10 и внутренняя Задача 10* являются союзными; также внутренняя Задача 3.10 и внешняя Задача 10* являются союзными

задачами. Введем в рассмотрение функции

$$Q_k(s) = \int_0^s q_k(\sigma) d\sigma, \quad T_k(s) = \int_0^s (\vec{P}_n(\sigma), \vec{e}^k) d\sigma \quad (k = 1, 2) \quad (3.194)$$

Применим в (3.191) интегрирование по частям и затем произведем интегрирование по переменной s_0 (в пределах от $s_0 = 0$ до произвольного фиксированного s_0). Получим уравнения

$$\begin{aligned} \pm\pi Q_1(s_0) + \int_L \{Q_1(s)(1 + \cos 2\theta) + Q_2(s) \sin 2\theta\} \frac{\partial\theta(s, s_0)}{\partial s} ds &= \\ &= T_1(s_0) - Q_1(a) \int_L \frac{\cos \omega_0}{r} ds \\ \pm\pi Q_2(s_0) + \int_L \{Q_1(s) \sin 2\theta + Q_2(s)(1 - \cos 2\theta)\} \frac{\partial\theta(s, s_0)}{\partial s} ds &= \quad (3.195) \\ &= T_2(s_0) - Q_2(a) \int_L \frac{\cos \omega_0}{r} ds \end{aligned}$$

Аналогичным образом, полагая $P_k^*(s) = \int_0^s P_k^*(\sigma) d\sigma$, преобразуем уравнения (3.192) к виду

$$\begin{aligned} \pm\pi P_1^*(s_0) - \int_L \{P_1^*(s)(1 + \cos 2\theta) + P_2^*(s) \sin 2\theta\} \frac{\partial\theta(s, s_0)}{\partial s} ds &= \\ &= P_1^*(a) \int_L \frac{\cos \omega_0}{r} ds \\ \pm\pi P_2^*(s_0) - \int_L \{P_1^*(s) \sin 2\theta + P_2^*(s)(1 - \cos 2\theta)\} \frac{\partial\theta(s, s_0)}{\partial s} ds &= \\ &= P_2^*(a) \int_L \frac{\cos \omega_0}{r} ds \quad (3.196) \end{aligned}$$

Интегральные уравнения (3.195), (3.196) имеют такую же структуру, как и уравнения (3.188) и (3.193). Однако решения уравнений (3.195) и (3.196) не обязаны быть периодическими (однозначными на контуре L); иначе говоря, не являются обязательными равенства

$$P_k^*(a) = 0, \quad Q_k(a) = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (3.197)$$

Интегральные уравнения (3.188) для внутренней Задачи 3.10 разрешимы при выполнении условия

$$\int_L (\vec{V}, \vec{n}) ds = 0. \quad (3.198)$$

Внешняя Задача 10*, союзная с внутренней Задачей 3.10, разрешима при условии

$$\int_L (\vec{P}_n, \vec{e}^1 p_1^0(s) + \vec{e}^2 p_2^0(s)) ds = 0, \quad (3.199)$$

где функции $\{p_1^0(s), p_2^0(s)\}$ (зависящие от заданного контура L и в общем случае пока неизвестные) являются решением однородных интегральных уравнений (3.188) для внутренней Задачи 3.10.

Внутренняя Задача 10* разрешима при выполнении трех условий:

$$T_1(a) = 0, \quad T_2(a) = 0, \quad \int_L (\vec{P}_n, \vec{e}^1 x_1(s) - \vec{e}^2 x_2(s)) ds = 0, \quad (3.200)$$

Первые два из условий (3.200) означают равенство нулю главного вектора заданных на контуре L напряжений \vec{P}_n , а третье условие выражает требование равенства нулю главного момента напряжений.

3.8.4 Применение методов Монте–Карло.

Перепишем в векторном виде уравнения (3.188) и (3.191)

$$\pm \pi \vec{M}_c(s_0) + \int_L A_c(s, s_0) \vec{M}_c(s) ds = \vec{F}_c^{(1)}(s_0), \quad (3.201)$$

где

$$\vec{M}_c(s) = \begin{pmatrix} p_1(s) \\ p_2(s) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_c^{(1)}(s_0) = \begin{pmatrix} (\vec{V}(\vec{x}_0), \vec{e}^1) \\ (\vec{V}(\vec{x}_0), \vec{e}^2) \end{pmatrix},$$

$$A_c(s, s_0) = \begin{pmatrix} (1 + \cos 2\theta) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & (1 - \cos 2\theta) \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s} \right).$$

$$\pm \pi \vec{N}_c(s_0) + \int_L B_c(s, s_0) \vec{N}_c(s) ds = \vec{F}_c^{(2)}(s_0), \quad (3.202)$$

$$\vec{N}_c(s) = \begin{pmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_c^{(1)}(s_0) = \begin{pmatrix} (\vec{P}_{n_0}, \vec{e}^1) \\ (\vec{P}_{n_0}, \vec{e}^2) \end{pmatrix},$$

$$B_c(s, s_0) = \begin{pmatrix} -(1 + \cos 2\theta) & 2 \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -(1 - \cos 2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s_0} \end{pmatrix}.$$

Запишем в векторной форме однородные уравнения союзные с уравнениями (3.201) и (3.202), то есть уравнения (3.195) и (3.196)

$$\pm \pi \vec{M}_c^*(s_0) + \int_L A_c^*(s, s_0) \vec{M}_c^*(s) ds = 0, \quad (3.203)$$

где

$$\vec{M}_c^*(s) = \begin{pmatrix} p_1^*(s) \\ p_2^*(s) \end{pmatrix}, \quad A_c^*(s, s_0) = \begin{pmatrix} (1 + \cos 2\theta) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & (1 - \cos 2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s_0} \end{pmatrix}.$$

$$\pm \pi \vec{N}_c^*(s_0) + \int_L B_c^*(s, s_0) \vec{N}_c^*(s) ds = 0, \quad (3.204)$$

где

$$\vec{N}_c^*(s) = \begin{pmatrix} q_1^*(s) \\ q_2^*(s) \end{pmatrix},$$

$$B_c^*(s, s_0) = \begin{pmatrix} -(1 + \cos 2\theta) & 2 \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -(1 - \cos 2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta(s, s_0)}{\partial s} \end{pmatrix}.$$

Пусть контур L таков, что интегральные операторы K_1, K_2 и K_1^*, K_2^* удовлетворяют условиям

$$\rho(K_i) < 1 \quad \rho(K_i^*) < 1 \quad (k = 1, 2). \quad (3.205)$$

Здесь $\rho(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|K^n\|^{\frac{1}{n}}$ - спектральный радиус оператора K , причем $\rho(K) \leq \|K^n\|^{\frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \dots$, K_1 - интегральный оператор с ядром A_c , а

K_1^* с ядром A_c^* ; соответственно K_2 с ядром B_c^* . Тогда численно решаются интегральные уравнения (3.201) - (3.204). Мы покажем способ построения одного из алгоритмов методов Монте-Карло для решения уравнения (3.201) и союзного с ним уравнения (3.203).

Разделив обе стороны уравнения на π и переобозначив $A_c := \frac{-1}{\pi} A_c$, $\vec{F}_c^{(1)} := \frac{1}{\pi} \vec{F}_c^{(1)}$, $K_1 := \frac{1}{\pi} K_1$, мы получим из (3.201) для случая $+\pi$ уравнение

$$\vec{M}_c(s_0) = \int_L A_c(s, s_0) \vec{M}_c(s) ds + \vec{F}_c^{(1)}(s_0), \quad (3.206)$$

Сделав аналогичные преобразования, из (3.203) получим

$$\vec{M}_c^*(s_0) = \int_L A_c^*(s, s_0) \vec{M}_c^*(s) ds, \quad (3.207)$$

Если выполнено условие (3.205), то решение, например, системы (3.206) представимо рядом Неймана.

$$\vec{M}_c = \sum_{n=0}^{\infty} K_1^n \vec{F}_c^{(1)}, \quad K_1^0 \vec{F}_c^{(1)} \equiv \vec{F}_c^{(1)}.$$

Нам надо оценить функционал

$$I_H = (\vec{M}_c, \vec{H}) = \sum_{i=1}^n \int_L P_i(s) H_i(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} (K_1^n \vec{F}_c^{(1)}, \vec{H}),$$

где $\vec{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$ - известная вектор-функция с ограниченными компонентами.

Введем вспомогательный случайный вектор "весов" \vec{Q} по формулам

$$Q_0^{(1)} = \frac{F_{ci}^{(1)}(\vec{x}_0)}{\alpha(\vec{x}_0)}, \quad Q_n^{(1)} = \sum_{j=1}^n Q_{n-1}^{(j)} \frac{A_{cij}(\vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n)}{g(\vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n)}, \quad (3.208)$$

где $\alpha(\vec{x})$ - начальная плотность цепи Маркова, $g(\vec{x}', \vec{x}) = r(\vec{x}', \vec{x})[1 - \beta(\vec{x}')] - \beta(\vec{x})$ - переходная плотность цепи Маркова, $r(\vec{x}', \vec{x})$ - плотность вероятности перехода, $\beta(\vec{x}')$ - вероятность обрыва траектории при переходе $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$.

Через N обозначим случайный номер последнего состояния цепи Маркова.

Можно показать, что [31]

$$M \left\{ \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i=1}^n Q_k^{(i)} H_i(\vec{x}_k) \right] \right\} = (\vec{M}_c, \vec{H}) = (\vec{F}_c^{(1)}, \vec{M}_c^*). \quad (3.209)$$

Случайная величина

$$\xi = \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i=1}^n Q_k^{(i)} H_i(\vec{x}_k) \right] \quad (3.210)$$

называется основной оценкой функционала I_H

Цепь Маркова каждый раз начинается с точки x_0 . При некоторых ограничениях на функцию $\alpha(\vec{x}), r(\vec{x}', \vec{x})$ и $\beta(\vec{x}')$, а именно траектории цепи должны иметь возможность начинаться в тех точках, где $\vec{F}_c^{(1)} \neq 0$, а при переходе $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$ попадать в точки, где $A_c(\vec{x}', \vec{x}) \neq 0$. Это означает, что должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \alpha(\vec{x}) \neq 0 & \text{при } F_c^{(1)}(\vec{x}) \neq 0 \\ g(\vec{x}', \vec{x}) \neq 0 & \text{при } A_c(\vec{x}', \vec{x}) \neq 0. \end{cases} \quad (3.211)$$

Введем вспомогательный интегральный оператор \tilde{K}_1 с ядром $|A_c(\vec{x}', \vec{x})|$.

Теорема 3.12 *если выполняются условия (3.211) и $\|\tilde{K}_1^{n_0}\| < 1$ при некотором натуральном n_0 , то*

$$M\xi = M \left\{ \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i=1}^n Q_k^{(i)} H_i(\vec{x}_k) \right] \right\} = I_h = (\vec{M}_c, \vec{H}).$$

Теорема 3.13 *если выполняются условия (3.211) и $\|\tilde{K}_1^{n_0}\| < 1$ при некотором натуральном n_0 ,*

$$D \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\Delta_k \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_k^{(i)} \tilde{H}_i(\vec{x}_k) \right] \right\} \equiv D\xi_1 < +\infty,$$

то дисперсия $D\xi$ выражается формулой $D\xi = (\chi, H(2M_c^* - H)) - I_h^2$,

где χ - ряд Неймана для уравнения

$$(\psi \vec{x}) = \int_L \frac{A_c^2(\vec{x}', x)\psi(\vec{x}')}{g(\vec{x}', x)} d\vec{x}' + \frac{(F_c^2(x))^2}{\alpha(x)}.$$

Здесь Δ_k равно 1 до первого обрыва и 0 после него, $\tilde{Q}_k^{(i)}$ - веса для задачи со следующими функциональными характеристиками:

$$\tilde{A}_c(\vec{x}', x) = |A_c(\vec{x}', x)|, \tilde{F}_c^{(1)}(x) = |F_c^{(1)}(x)|, \tilde{H}(x) = |H(x)|.$$

Итак, численное решение задачи (3.206) получаем из равенства (3.209). Подставляя в равенство (3.209) обобщенные функции $\vec{F}_c^{(1)}(\vec{x}') = \delta(\vec{x}' - \vec{x})$, $\alpha(\vec{x}') = \delta(\vec{x}' - x)$ и полагая $Q_0^{(i)} = 1$, получим численное решение союзного интегрального уравнения

$$M_{ci}^*(\vec{x}) = H_i(\vec{x}) + M \left\{ \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i=1}^n Q_k^{(i)} H_i(\vec{x}_k) \right] \right\}. \quad (3.212)$$

Из равенств (3.209) и (3.212) видно, что решение основного уравнения (3.206) и союзного с ним уравнения (3.207) оцениваются с помощью одной и той же траектории цепи Маркова. Это дает большое преимущество данного алгоритма методов Монте-Карло. Оценку решения в заданной точке \vec{x} можно получить на основе выражения

$$\vec{M}_c(\vec{x}) = \vec{F}_c^{(1)}(\vec{x}) + M \left\{ \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i=1}^n Q_k^{*(i)} F_{ci}^{(1)}(\vec{x}_k) \right] \right\},$$

рассматривая исходное уравнение (3.206) как сопряженное к (3.207), где $Q_k^{*(i)}$ - "сопряженные" веса.

Для построения более эффективной оценки достаточно записать интегральное уравнение (3.206) следующим образом:

$$\vec{M}_c(\vec{x}) = (\vec{M}_c + H_x) + \vec{F}_c^{(1)}(\vec{x}).$$

где $H_x(\vec{x}') = A_c(\vec{x}', x)$. Отсюда

$$\vec{M}_c(\vec{x}) = M \left\{ \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i=1}^n Q_k^{(i)} A_c(\vec{x}_k, \vec{x}) \right] \right\} + \vec{F}_c^{(1)}(\vec{x})$$

Последнее выражение дает возможность оценить $\vec{M}_c(\vec{x})$ сразу в нескольких точках.

Почти все оценки решения исходного интегрального уравнения связаны с оценками решения сопряженного интегрального уравнения и наоборот. Это обстоятельство повышает эффективность численных алгоритмов методов Монте–Карло.

4

Разностные аналоги уравнений

Навье–Стокса

4.1 Разностные возмущенные уравнения

Навье–Стокса

Как известно, для решения разностных уравнений во многих случаях удобно применять метод Монте–Карло. Особенно это удобно, когда итерационные методы сходятся медленно и не требуется вычислять решение с большой точностью. Однако метод Монте–Карло не всегда может быть использован для решения линейных алгебраических уравнений. В частности, схема Неймана–Улама применима лишь в том случае, когда спектральный радиус матрицы мажорантного уравнения меньше единицы. Если это не так, то в ряде случаев применение метода Монте–Карло возможно, но может потребоваться дополнительная память ЭВМ для заполнения промежуточных результатов. Как будет показано далее, так обстоит дело при решении разностного аналога уравнений Навье–Стокса. Введем обозначения, необходимые

для описания разностных схем. Пусть Ω – ограниченная область в R_2 с границей $\partial\Omega$, и пусть $T > 0$ фиксировано. Обозначим через Q цилиндр $\Omega \times (0, T)$. Мы ищем вектор–функцию $\vec{W} = (U(x, t), V(x, t))$ и скалярную функцию $p(x, t)$, представляющие скорость и давление жидкости, которые определены в Q и удовлетворяют следующим уравнениям и краевым, начальным условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{W} + \text{grad } p = \vec{f}, \\ \text{div } \vec{W} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\vec{W}|_{\partial Q} = 0, \quad \vec{W}|_{t=0} = \vec{W}_0(x), \quad (4.2)$$

где $\partial Q = \partial\Omega \times [0, T]$, $\vec{f}(x, t)$ и $\vec{W}_0(x) = (U_0(x), V_0(x))$ – заданные вектор–функции, причем \vec{f} определена на $\Omega \times [0, T]$, а \vec{W}_0 – на Ω .

Разобьем все пространство (x, t) на элементарные ячейки (параллелепипеды) плоскостями: $x_{1i} = i \cdot h$, $x_{2j} = j \cdot h$, $h > 0$, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $t = k\tau$, $\tau = T/N$, $k = 0, 1, \dots$. Обозначим через Ω^k сечение цилиндра Q плоскостью $t = k\tau$, а через S^k его границу, так что $\bar{\Omega}^k = \Omega^k \cup S^k$. Замкнутую область, состоящую из элементарных кубов, принадлежащих $\bar{\Omega}^k$, обозначим через $\bar{\Omega}_h^k = \Omega_h^k \cup S_h^k$, причем S_h^k есть граница. Символы Ω_h^k и S_h^k будут обозначать также совокупность точек решетки (вершины ячеек), принадлежащих области Ω_h^k и ее границе S_h^k соответственно. Также введем обозначения для разностных отношений по x_i :

$$W_{x_i}(x, t) = \frac{1}{h}(W(x + he^i, t) - W(x, t)),$$

$$W_{\bar{x}_i}(x, t) = \frac{1}{h}(W(x, t) - W(x - he^i, t)),$$

где e^i – орт, направленный по оси x_i , и аналогично для разностных отношений $W_t(x, t)$.

Для составления разностных схем воспользуемся известной аппроксимацией системы (4.1) при помощи метода искусственной сжимаемости:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{W} - \frac{1}{\varepsilon} \text{grad div } \vec{W} = \vec{f}, \quad (4.3)$$

где $\varepsilon > 0$ "мало". Вопросы аппроксимации решения W, p уравнений (4.1) решением W_t, p_ε – уравнений (4.3); существования и единственности

решений; сходимость решения возмущенных задач к решениям уравнений Навье–Стокса при $\varepsilon \rightarrow 0$; дискретизация возмущенной задачи и сходимость дискретных аппроксимаций к решению уравнений Навье–Стокса рассматривались в [6]. Рассмотрим следующие неявные разностные схемы для (4.3), (4.2)

$$W_{it} - \nu W_{ix_k \bar{x}_k} - \frac{1}{\varepsilon} (W_{kx_k})_{\bar{x}_i} = f_i, \quad (4.4)$$

$$\vec{W} \Big|_{\partial Q_h^l} = 0, \quad \vec{W} \Big|_{t=0} = W_0. \quad (4.5)$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, k и i пробегает значения 1, 2. Уравнения (4.4) берутся в точках Ω_h^l , $l = 0, 1, \dots, N-1$. Взяв $e^1 = e^2$ из (4.4) получим

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\tau} - \frac{\nu}{h^2} (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n) - \frac{1}{\varepsilon h^2} (u_{i+1,j}^n \\ - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n - v_{i-1,j+1}^n + v_{i-1,j}^n) = f_{1i,j}^n; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j}^{n-1}}{\tau} - \frac{\nu}{h^2} (v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n - 4v_{i,j}^n) - \frac{1}{\varepsilon h^2} (v_{i,j+1}^n \\ - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n + u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i,j-1}^n) = f_{2i,j}^n \end{aligned} \quad (4.7)$$

Введем обозначения $a = \nu/h^2 > 0$, $b = 1/\varepsilon h^2 > 0$, $c = 4a + 2b + 1/\tau > 0$. После несложных преобразований из (4.6) и (4.7) получим

$$\begin{aligned} cu_{i,j}^n + bv_{i,j}^n = (a+b)u_{i+1,j}^n + (a+b)u_{i-1,j}^n + bv_{i-1,j}^n + au_{i,j+1}^n \\ + bv_{i,j+1}^n + au_{i,j-1}^n - bv_{i-1,j+1}^n + f_{1i,j}^n + \frac{1}{\tau} u_{i,j}^{n-1}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} Cv_{i,j}^n + bu_{i,j}^n = (a+b)v_{i,j+1}^n + (a+b)v_{i,j-1}^n + bu_{i,j-1}^n \\ + av_{i+1,j}^n + bu_{i+1,j}^n + av_{i-1,j}^n - bu_{i+1,j-1}^n + f_{2i,j}^n + \frac{1}{\tau} v_{i,j}^{n-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Исключив из (4.8) $v_{i,j}^n$, а из (4.9) $u_{i,j}^n$, получим

$$\begin{aligned} u_{i,j}^n = q_1 u_{i+1,j}^n + q_2 v_{i+1,j}^n + q_3 u_{i-1,j}^n + q_4 v_{i-1,j}^n + q_5 u_{i,j+1}^n \\ + q_6 v_{i,j+1}^n + q_7 u_{i,j-1}^n + q_8 v_{i,j-1}^n + q_{10} u_{i+1,j-1}^n + q_9 v_{i-1,j+1}^n \\ + d\tau f_{1i,j}^n - e\tau f_{2i,j}^n + du_{i,j}^{n-1} - ev_{i,j}^{n-1}; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^n = q_5 v_{i+1,j}^n + q_6 u_{i+1,j}^n + q_7 v_{i-1,j}^n + q_8 u_{i-1,j}^n + q_1 v_{i,j+1}^n \\ + q_2 u_{i,j+1}^n + q_3 v_{i,j-1}^n + q_4 u_{i,j-1}^n + q_{10} v_{i-1,j+1}^n + q_9 u_{i+1,j-1}^n \\ + d\tau f_{2i,j}^n - e\tau f_{1i,j}^n + dv_{i,j}^{n-1} - eu_{i,j}^{n-1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{(a+b)c - b^2}{c^2 - b^2}, \quad q_2 = -\frac{ab}{c^2 - b^2}, \quad q_3 = \frac{(a+b)c}{c^2 - b^2}, \\ q_4 &= \frac{bc - ab}{c^2 - b^2}, \quad q_5 = \frac{ac}{c^2 - b^2}, \quad q_6 = \frac{bc - (a+b)b}{c^2 - b^2}, \\ q_7 &= \frac{ac - b^2}{c^2 - b^2}, \quad q_8 = -\frac{(a+b)b}{c^2 - b^2}, \quad q_9 = -\frac{bc}{c^2 - b^2}, \quad q_{10} = \frac{b^2}{c^2 - b^2}, \\ d &= \frac{c}{c^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\tau}, \quad e = \frac{b}{c^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1 При фиксированном $\nu > 0$ всегда можно выбрать $\varepsilon > 0$ и

$\tau > 0$ такими, что выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{10} |q_i| < 1, \quad (4.12)$$

причем ε можно выбрать сколь угодно малым.

Доказательство. Легко заметить, что $c^2 - b^2 > 0$, $c > 4a + 2b$, $q_1 \geq$

0 , $-q_2 > 0$, $q_3 > 0$, $q_4 \geq 0$, $q_5 > 0$, $q_6 \geq 0$, $-q_8 > 0$, $-q_9 > 0$, $q_{10} > 0$.

Тогда может быть только два случая:

$$1) \quad q_7 = \frac{ac - b^2}{c^2 - b^2} \geq 0 \quad \text{и} \quad 2) \quad q_7 < 0$$

В первом случае получим следующую систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} ac - b^2 \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{10} |q_i| = \frac{4ac + 5bc - b^2}{c^2 - b^2} < 1, \end{array} \right. \quad (4.13)$$

а во втором случае

$$\left\{ \begin{array}{l} ac - b^2 < 0 \\ \sum_{i=1}^{10} |q_i| = \frac{2ac + 5bc + b^2}{c^2 - b^2} < 1, \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Из (4.13), учитывая $c > 0$, $\tau > 0$, $\nu > 0$, $\varepsilon > 0$, получим:

1) если $0 < \varepsilon \leq (\sqrt{41} - 5)/(8\nu)$, то τ надо выбрать из условия

$$0 < \tau \leq \nu\varepsilon^2 h^2 / (1 - 4\nu^2\varepsilon^2 - 2\nu\varepsilon),$$

2) если $\varepsilon > (\sqrt{41} - 5)/(8\nu)$, то $0 < \tau < \varepsilon h^2 / 3$.

Из (4.14) следует, что, если $\varepsilon < (\sqrt{41} - 5)/(8\nu)$, то

$$\frac{\nu\varepsilon^2 h^2}{1 - 4\nu^2\varepsilon^2 - 2\nu\varepsilon} < \tau < \frac{2\varepsilon h^2}{1 + \sqrt{33 + 20\nu\varepsilon + 4\nu^2\varepsilon^2} - 6\nu\varepsilon}.$$

Лемма доказана.

Теперь (4.5), (4.10) и (4.11) запишем в матричном виде

$$X^n = DX^n + F^n + CX^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Матрица D имеет следующую структуру: внутреннему узлу с номером α соответствует строка $d_{\alpha,1}, \dots, d_{\alpha,L}$, в которой 10 элементов равны q_1, \dots, q_{10} и $d_{\alpha,j_1} \neq d_{\alpha,j_2}$ для всех α и $j_1 \neq j_2$, а остальные – нули; граничному узлу с номером α соответствует строка $d_{\alpha,1} = d_{\alpha,2} = \dots = d_{\alpha,L} = 0$; все диагональные элементы $d_{\alpha,\alpha} = 0$. Элементы вектора $F^n = \{F_\alpha^n\}$ имеет следующую структуру: $F_\alpha^n = d\tau f_{1\alpha}^n - e \cdot \tau \cdot f_{2\alpha}^n$, если узел номер α – внутренний и уравнение из системы (4.10); $F_\alpha^n = d\tau f_{2\alpha}^n - e \cdot \tau \cdot f_{1\alpha}^n$, если узел номер α – внутренний и уравнение из системы (4.11), и $F_\alpha^n = 0$, если узел номер α – граничный. Матрица $C = \{C_{i,j}\}$ имеет следующую структуру:

$C_{\alpha,\alpha} = d, C_{\alpha+1,\alpha} = -e$, если уравнение из (4.11) и $C_{\alpha,\alpha} = d, C_{\alpha,\alpha+1} = -e$, если уравнение из (4.10). L – количество узлов.

$$X^n = \{U_\alpha^n, V_\alpha^n\}, \quad X^0 = \{U_{0\alpha}, V_{0\alpha}\} \quad \alpha = 1, 2, \dots, L.$$

Систему решаем последовательно в порядке возрастания n ($n = 1, 2, \dots, N$). Обозначим через $G^n = F^n + CX^{n-1}$.

Рассмотрим теперь мажорантные уравнения с матрицей A , элементами которой служат модули элементов матрицы D . Относительно A на основании леммы можно утверждать, что для заданного $\nu > 0$, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и для $\tau > 0$ спектральный радиус $\rho(A) < 1$. Отсюда следует теорема.

Теорема 4.1 *Для заданного $\nu > 0$ при фиксированном n можно выбрать $\varepsilon > 0$ достаточно малым и $\tau > 0$ такими, что система*

$$X_i^n = DX_{i-1}^n + G^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots.$$

может быть решена методом Монте–Карло (применима схема Неймана – Улама).

Доказательство. Используя лемму и теорему Гершгорина, получим

$$\rho(D) \leq \rho(A) = |\lambda_{\max}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L |a_{i,j}| < 1,$$

где матрица A имеет вид:

$$A = \{a_{i,j}\} = \{|d_{i,j}|\} \quad \text{для всех } i, j.$$

Отсюда следует утверждение теоремы (4.1). Если запишем систему (4.15) для всех n ($n = 1, 2, \dots, N$), то получим следующую "расширенную" систему

$$Y = BY + H, \tag{4.16}$$

где матрица B имеет блочный вид, каждый блок матрицы соответствует системе (4.15) при фиксированном n , H – известный вектор. Справедлива следующая теорема

Теорема 4.2 *Для системы уравнений*

$$Y = \tilde{B}Y + H, \quad \text{где } \tilde{B} = |B|,$$

мажорирующей (4.16), метод последовательных приближений

$$Y_i = \tilde{B}Y_{i-1} + H, \quad i = 1, 2, \dots$$

расходится.

Теорема 4.2 легко доказывается, если заметить, что сумма модулей элементов строки матрицы \tilde{B} при любых положительных $\nu, \varepsilon, \tau, h$ строго больше единицы. Таким образом, к системе (4.16) не применима схема Неймана–Улама и нельзя построить схему "сквозного счета" для оценки функционалов от решения (4.16). Тем не менее при запоминании решения на данном временном слое методом Монте–Карло можно найти решение на следующем. При этом требует дополнительного исследования вопрос о поведении случайной ошибки при переходе с $(n-1)$ -го слоя на n -й. Это исследование не проводилось. Но полученные результаты численного эксперимента подтверждают разумность использования такого подхода (вычисление по слоям).

Алгоритм решения системы (4.15).

Достаточно построить алгоритм решения систем (4.10) и (4.11) для $n = 1$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^1 &= d \cdot \tau \cdot f_{1i,j}^1 - e \cdot \tau f_{2i,j}^1 + du_{0i,j} - ev_{0i,j}, \\ \psi_{i,j}^1 &= d \cdot \tau \cdot f_{2i,j}^1 - e \cdot \tau f_{1i,j}^1 + dv_{0i,j} - eu_{0i,j}. \end{aligned}$$

Для определения $u_{i,j}^1$ рассмотрим случайную величину $\xi_{i,j}^1$. Реализация случайной величины $\xi_{i,j}^1$ строится следующим образом:

1) точку помещаем в узел $(i \cdot h, j \cdot h)$, положив начальное значение

счетчика равным $\varphi_{i,j}^1$;

2) с равными вероятностями $(p_{i,j}^1, p_{i,j}^2, p_{i,j}^3, p_{i,j}^4, p_{i,j}^5, p_{i,j}^6)$ точку перемещаем в один из соседних узлов, прибавив к счетчику соответствующее значение φ^1 , умноженное на "вес" этого узла. Например, если переходим в узел $((i+1)h, j \cdot h)$, то к счетчику прибавим $\varphi_{i+1,j}(q_1 + q_2)/p_{i,j}^1$. Затем снова выполняем 2) и т. д., пока точка не выйдет на границу. После выхода на границу траектория обрывается. Результативное значение счетчика дает выборочное значение случайной величины $\xi_{i,j}^1$. Аналогично строится реализация случайной величины $\eta_{i,j}^1$ для определения $v_{i,j}^1$, если возьмем вместо функции φ^1 функцию ψ^1 . Далее, найденные значения $u_{i,j}^1$ и $v_{i,j}^1$ во всех точках сетки при $n = 1$, подставив в правую часть уравнений (4.10) и (4.11) при $n = 2$, получим системы уравнений, аналогичные системам (4.10) и (4.11) при $n = 1$. Вновь полученные системы решаются так же, как системы (4.10) и (4.11) при $n = 1$. Совокупность решений систем (4.10) и (4.11) даст нам решение системы (4.15).

Теорема 4.3 *Имеют место равенства*

$$M\beta^1 = X^1 \quad (4.17)$$

$$M\xi_{i,j}^1 = U_{i,j}^1, \quad (4.18)$$

$$M\eta_{i,j}^1 = V_{i,j}^1. \quad (4.19)$$

Доказательство следует из того, что описанный алгоритм укладывается

в рамки схемы Неймана–Улама.

Для решения систем (4.10) и (4.11) должна быть построена цепь Маркова, определяемая следующей таблицей:

Переход из с номером (ih, jh) в узел с номером:	Вероятность перехода	Изменение веса узла для $U_{i,j}^1$	Изменение веса узла для $U_{i,j}^1$
$((i + 1)h, jh)$	$p_{i,j}^1$	$(q_1 + q_2)/p_{i,j}^1$	$(q_5 + q_6)/p_{i,j}^1$
$((i - 1)h, jh)$	$p_{i,j}^2$	$(q_3 + q_4)/p_{i,j}^2$	$(q_7 + q_8)/p_{i,j}^2$
$(ih, (j + 1)h)$	$p_{i,j}^3$	$(q_5 + q_6)/p_{i,j}^3$	$(q_1 + q_2)/p_{i,j}^3$
$(ih, (j - 1)h)$	$p_{i,j}^4$	$(q_7 + q_8)/p_{i,j}^4$	$(q_3 + q_4)/p_{i,j}^4$
$((j - 1)h, (j + 1)h)$	$p_{i,j}^5$	$q_9/p_{i,j}^5$	$q_{10}/p_{i,j}^5$
$((j + 1)h, (j - 1)h)$	$p_{i,j}^6$	$q_{10}/p_{i,j}^6$	$q_9/p_{i,j}^6$

При этом в каждом узле $\sum_{l=1}^6 p_{i,j}^l = 1 - \omega_{i,j}$, где $\omega_{i,j}$ есть вероятность гибели частицы до перехода. Очевидно, что при такой реализации случайных величин

$$D\beta^1 < +\infty.$$

Замечание 4.1 Если заданная точка сеточной области находится близко

к какой-то границе, то можно построить более эффективный алгоритм,

чем изложенный выше. В этом случае надо двигаться с большей вероятностью

– с вероятностью $p_{i,j}^k + \epsilon_{i,j}^k$ – к ближайшей границе. При этом траектория

цепи Маркова быстрее достигает границы, а оценка решения также

остается ϵ -смещенной. Этот алгоритм только уменьшает расчетное

время на ЭВМ. Этот факт подтверждается вычислительным экспериментом.

Мы рассмотрели нулевое краевое условие (условие "прилипания" на границе). Если задано краевое условие другого типа, то для построения алгоритма следует в граничных узлах рассмотреть соответствующие соотношения. Например, если $W|_{\partial Q} = g(x, t)$, то после выхода на границу к счетчику прибавляется соответствующее значение g , и траектория обрывается, а, если на границе области $(\partial W/\partial n)|_{\partial Q} = g(x, t)$, то, используя разностное приближение, приходим к "эффекту отражения от границы". [84], [27], [28], [93], [106].

4.2 Аппроксимация полных возмущенных уравнений

Для аппроксимации полных возмущенных уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \nu \Delta W - \frac{1}{\varepsilon} \text{grad div } W + \sum_{i=1}^2 W_i \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{1}{2} (\text{div } W) W = f,$$

применив схему неявную в линейной и явную в нелинейной части уравнений, получим систему алгебраических уравнений

$$X^n = DX^n + F^n + EX^{\tilde{n}-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где элементы матрицы E и вектора $X^{\tilde{n}-1}$ могут быть определены и нелинейной части уравнений отвечает $EX^{\tilde{n}-1}$. Если обозначим через $\tilde{F}^n = F^n + EX^{\tilde{n}-1}$, то для решения этой системы при фиксированном n ($n = 1, \dots, N$; при $n = 1$ $EX^{\tilde{0}}$ – известная величина) можно применить приведенный выше алгоритм.

4.2.1 Дисперсия оценок.

Пусть $L^{(M)}$ есть множество траекторий цепи Маркова длины M при условии, что почти все траектории конечны, и $\chi_{L^{(M)}}$ – характеристическая функция, то есть $\chi_{L^{(M)}}$ есть функция траектории, равная 1, если траектория имеет длину M , и 0 в противном случае.

Пусть случайная величина β_M^1 определена на траекториях марковской цепи $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_M$ длины M (на множестве $L^{(M)}$), ω_{im} – вероятность гибели частицы.

Если $\omega_{im} > 0$, то положим

$$\tilde{\beta}_M^1 = \sum_{M=0}^{\infty} \chi_{L^{(M)}} \beta_M^1, \quad (4.20)$$

где $\beta_M^1 = \sum_{m=0}^M Q_m^{(n)}(x_{i_0}, \dots, x_{i_m}) Z(x_{i_m})$

и, если $\omega_{i_m} = 0$, то

$$\tilde{\beta}_m^1 = \sum_{m=0}^{\infty} Q(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots) Z(x_{i_m}) \quad (4.21)$$

В обоих случаях предполагается, что $\tilde{\beta}_m^1$ суммируема на $L^{(M)}$. Для некоторого набора $(x_{i_0}, \dots, x_{i_m}) \in \Omega_h^{(M+1)}$

$$\tilde{f}_{i_0} d_{i_0, i_1} \dots d_{i_{M-1}, i_M} \cdot Z_{i_M} \neq 0, \quad (4.22)$$

то для него же

$$p_{i_0} p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{M-1}, i_M} \cdot \omega_{i_M} > 0,$$

где $\tilde{f}_{i_0} = \varphi_{i_0}^1$ для системы (4.10) и $\tilde{f}_{i_0} = \psi_{i_0}^1$ для системы (4.11). Положим, далее

$$q_0 = \tilde{f}_{i_0} / p_{i_0}, \quad q_{i+1} = q_i \cdot \frac{d_{i, i+1}}{p_{i, i+1}}$$

$$Q_i^M(x_{i_0}, \dots, x_{i_M}) = q_i \mu_i^{(M)}(x_{i_0}, \dots, x_{i_M}),$$

$$Q_i(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots) = q_i \mu_i(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots).$$

Известно, что $M_{\tilde{\beta}_M^1} = (Z, X^1)$. Тогда выполнение (4.22) необходимо для несмещенности $\tilde{\beta}_M^1$. Также можно написать "дискретный аналог" достаточных условий несмещенности $\tilde{\beta}_M^2$ в виде условий, налагаемых на $\mu_i^{(M)}$ когда $\omega > 0$. (см. [100], [101]). Рассмотрим оценку

$$\tilde{\beta}_{M_1}^1 = \sum_{M_1=0}^{\infty} \chi_{L^{(M_1)}} \cdot \beta_{M_1}^1,$$

где $\beta_{M_1}^1 = \sum_{m=0}^{M_1} Q_m^{(M_1)} \cdot \tilde{f}_{i_m}^1$. Очевидно, для этой оценки, при $n = 1$

$$\mu_i^{(M_1)} = C_1 = \text{const} < \infty, \quad M_{\tilde{\beta}_{M_1}^1} = (Z, X^1).$$

Пусть $n = 2$, и пусть $\tilde{f}_{\varepsilon_{i_m}}^2 = \tilde{f}_{i_m}^2 + \varepsilon_{i_m}^1$, тогда

$$\tilde{\beta}_{M_2}^2 = \sum_{M_2=0}^{\infty} \chi_{L^{(M_2)}} \cdot \beta_{M_2}^2, \quad \beta_{M_2}^2 = \sum_{m=0}^{M_2} Q_m^{(M_2)} \cdot \tilde{f}_{i_m}^2 + \sum_{m=0}^{M_2} Q_m^{(M_2)} \cdot \varepsilon_{i_m}^1$$

и для этой оценки будет

$$\mu_i^{(M_2)} = C_2 = \text{const} < \infty, \quad M\tilde{\beta}_{M_2}^2 = (Z, X^2) + \varepsilon^2,$$

где $\varepsilon^2 = (Z, \sum_{m=0}^{M_0} D^m \cdot \varepsilon^1)$. Известно, что при $M_2 \rightarrow \infty$ ε^2 стремится к $(Z, (E - D)^{-1} \cdot \varepsilon^1)$, а это выражение стремится к нулю при $\varepsilon^1 \rightarrow 0$. И так далее

$$\tilde{\beta}_{M_N}^N = \sum_{M_N=0}^{\infty} \chi_{L^{(M_N)}} \cdot \beta_{M_N}^N,$$

где $\beta_{M_N}^{2N} = \sum_{m=0}^{M_N} Q_m^{(M_N)} \cdot \tilde{f}_{\varepsilon_{i_m}}^N$, $\tilde{f}_{\varepsilon_{i_m}}^N = f_{\varepsilon_{i_m}}^N + \varepsilon_{i_m}^{N-1}$ и для этой оценки

$$\mu_i^{(M_N)} = C_N = \text{const} < \infty, \quad M\tilde{\beta}_{M_N}^N = (Z, X^N) + F(\varepsilon^i), \quad i = 1, N$$

при $M_i \rightarrow \infty$ и $\varepsilon^i \rightarrow 0$ стремится к нулю. В этих случаях легко вычисляется, например, для $n = 1$ $a_i(x_{i_0}, \dots, x_{i_m})$, ((6.2.31), (6.2.47) [12]), $a(x) = c_1^2(2\tilde{X}^1 - Z)$, где \tilde{X}^1 есть решение уравнения $\tilde{X}^1 = D\tilde{X}^1 + Z$. Следуя [12] формулы (6.2.44), (6.2.45), (6.2.46) запишем для $n = 1$: $D\tilde{\beta}^1 = c_1^2 \sum_{i=0}^L Y_i^1(2 \cdot \tilde{X}^1 - Z) - (X^1, Z^2)^2$, где $Y_i^1 = \sum_{j=0}^L \frac{d_{ij}}{p_{ij}} Y_j + \frac{f_i^1}{p_i}$. Продолжая эту запись для $n = 2, 3, \dots, N$, и учитывая правую часть системы $f_{\varepsilon_{i_m}}^n$ ($n = 2, 3, \dots, N$), мы можем получить "дискретный аналог" Теорем 6.2 и 6.3 из [12], которые показывают явные выражения дисперсии на временных слоях (при $n = 2, 3, \dots, N$) и их конечность.

4.3 Разностные аналоги уравнений Навье–Стокса

Построение векторных алгоритмов методов Монте–Карло, связанных с дискретизацией дифференциального оператора, представляют большой

интерес. В работах [6] и [7] рассмотрена аппроксимация уравнений Навье–Стокса методом дробных шагов (метод расщепления или переменных направлений) и подробно исследована устойчивость и сходимость различных схем. Рассматривается возможность применения векторного алгоритма метода Монте–Карло ([44], [45]) для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в схемах переменных направлений при решении полных уравнений Навье–Стокса. Рассматриваются разностные схемы для случая трех пространственных переменных ($n = 3$) ограниченной области Ω евклидова пространства R_n . Случай $n = 2$ исследуется так же и справедливы все результаты, полученные для случая $n = 3$.

Для ограниченной области Ω в R_n с границей $\partial\Omega$ для фиксированного $T > 0$ и $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим систему:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{U} - \frac{1}{\varepsilon} \text{grad div } \vec{U} + \sum_{k=1}^n U_k \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} (\text{div } \vec{U}) \vec{U} = \vec{f}, \quad (4.23)$$

$$\vec{U}|_{\partial Q} = 0, \quad \vec{U}|_{t=0} = \vec{U}_0(x), \quad (4.24)$$

где $\partial Q = \partial\Omega \times [0, T]$, $\vec{f}(x, t)$ и $\vec{U}_0(x)$ – заданные вектор–функции, причем \vec{f} определена на $\Omega \times [0, T]$, а \vec{U}_0 – на Ω .

Используя обозначения, приведенные в [7], систему (4.23) можно представить в виде

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^n L_k(\vec{U}) - \frac{1}{\varepsilon} \text{grad div } \vec{U} = \vec{f}, \quad (4.25)$$

где

$$L_k(\omega) = -\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_k^2} + U_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \cdot \omega.$$

Приведем три варианта аппроксимации каждого из операторов L_k разностным оператором. Для $n = 3$ рассмотрим три схемы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (U_l^{m-2/3} - U_l^{m-1}) + L_3^m(U_L^{m-2/3}) - \frac{\delta_l^3}{\varepsilon} (3U_{3x_3}^{m-2/3} - 2U_{3x_3}^{m-5/3} + \\ + U_{1x_1}^{m-1} + U_{2x_2}^{m-4/3})_{\tilde{x}_3} = \frac{1}{3} f_L^{m-2/3}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (U_l^{m-1/3} - U_l^{m-2/3}) + L_2^m(U_l^{m-1/3}) - \frac{\delta_l^2}{\varepsilon} (3U_{2x_2}^{m-1/3} - 2U_{2x_2}^{m-4/3} + \\ + U_{1x_1}^{m-1} + U_{3x_3}^{m-5/3})_{\tilde{x}_2} = \frac{1}{3} f_l^{m-1/3}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(U_l^m - U_l^{m-1/3}) + L_1^m(U_l^m) - \frac{\delta_l^1}{\varepsilon}(3U_{1x_1}^m - 2U_{1x_1}^{m-1} + \\ + U_{2x_2}^{m-4/3} + U_{3x_3}^{m-5/3})_{\tilde{x}_1} = \frac{1}{3}f_l^m, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где $l = 1, 2, 3$ - номер компоненты вектор-функции $\vec{U} = (U_1(x, t), U_2(x, t), U_3(x, t))$ и $\vec{f} = (f_1(x, t), f_2(x, t), f_3(x, t))$. Отрезок $[0, T]$ при этом разбит точками $t_m = m\tau$, $t_{m-1/3} = (m-1/3)\tau$, $t_{m-2/3} = (m-2/3)\tau$, $m = 0, 1, \dots, M$. В (4.26) - (4.28) операторы $L_k^m(\omega)$ имеет структуру

$$L_k^m(\omega) = -\nu\omega_{x_k\tilde{x}_k} + \frac{1}{2}U_k^{+k^{m-k/3}} \cdot \omega_{x_k} + \frac{1}{2}U_k^{m-k/3} \cdot \omega_{\tilde{x}_k} + \frac{1}{2}U_{kx_k}^{m-k/3} \cdot \omega,$$

$k = 1, 2, 3$ и U_k доопределено каким-либо разумным образом на слоях $t < 0$. Эта схема соответствует первому варианту замены нелинейных членов. Второму варианту соответствует схема вида (4.26) - (4.28), в которой

$$L_k^m(\omega) = -\nu\omega_{x_k\tilde{x}_k} + \frac{1}{2}U_k^{+k^{m-k/3}} \cdot \omega_{\tilde{x}_k} + \frac{1}{2}U_k^{m-k/3} \cdot \omega_{x_k} + \frac{1}{2}U_{k\tilde{x}_k}^{m-k/3} \cdot \omega,$$

а члены с множителем $\frac{1}{\varepsilon}$ равны $-\frac{\delta_l^3}{\varepsilon}(3U_{3\tilde{x}_3}^{m-2/3} - 2U_{3\tilde{x}_3}^{m-5/3} + U_{1\tilde{x}_1}^{m-1} + U_{2x_1}^{m-4/3})_{\tilde{x}_3}$ в (4.26) и соответствующими выражениями в (4.27) и (4.28). Третий вариант дает симметрическую схему. Ее уравнения являются полусуммой соответствующих уравнений первой и второй системы. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} -\frac{\nu}{h^2} \pm \frac{1}{2h}U_l^p = \overset{+p}{U}_l, \quad \frac{3}{\varepsilon h^2} = b, \quad \frac{1}{\tau} + \frac{2\nu}{h^2} = a, \\ \frac{1}{3}f_l^p + \frac{1}{\tau}U_l^{p-1/3} = \frac{1}{3}F_l^p, \quad U_{li,j,k} = U_l^p, \quad U_{li,j,k\pm 1} = U_{lk\pm 1}^p \end{aligned}$$

и так далее, т.е. опускаем те индексы, где нет сдвигов по x_l , $l = 1, 2, 3$, $p = m-1, m-2/3, m-1/3, m$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}f_1^m - \frac{2b}{3}(U_{1i+1}^{m-1} - 2U_1^{m-1} + U_{1i-1}^{m-1}) + \frac{b}{3}(U_{2j+1}^{m-4/3} - U_2^{m-4/3} - U_{2i-1,j+1}^{m-4/3} \\ + U_{2i-1}^{m-4/3} + \frac{b}{3}(U_{3k+1}^{m-5/3} - U_3^{m-5/3} - U_{3i-1,k+1}^{m-5/3} + U_{3i-1}^{m-5/3}) + \frac{1}{\tau}U_1^{m-1/3} = \frac{1}{3}\tilde{F}_1^m, \\ \frac{1}{3}f_2^{m-1/3} - \frac{2b}{3}(U_{2j+1}^{m-4/3} - 2U_2^{m-4/3} + U_{2j-1}^{m-4/3}) + \frac{b}{3}(U_{1i+1}^{m-1} - U_1^{m-1} - U_{1i+1,j-1}^{m-1} \\ + U_{1j-1}^{m-1}) + \frac{b}{3}(U_{3k+1}^{m-5/3} - U_3^{m-5/3} - U_{3j-1,k+1}^{m-5/3} + U_{3j-1}^{m-5/3}) + \frac{1}{\tau}U_2^{m-2/3} = \frac{1}{3}\tilde{F}_2^{m-1/3}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}f_3^{m-2/3} - \frac{2b}{3}(U_{3k+1}^{m-5/3} - 2U_3^{m-5/3} + U_{3k-1}^{m-5/3}) + \frac{b}{3}(U_{1i+1}^{m-4/3} - U_1^{m-1} - U_{1i+1,k-1}^{m-1} + U_{1k-1}^{m-1}) + \frac{b}{3}(U_{2j+1}^{m-4/3} - U_2^{m-4/3} - U_{2j+1,k-1}^{m-4/3} + U_{2k-1}^{m-4/3}) + \frac{1}{\tau}U_3^{m-1} = \frac{1}{3}\tilde{F}_3^{m-2/3},$$

Для обозначения правой части второго варианта схемы (4.26) - (4.28) введем выражение $\frac{1}{3}\tilde{F}_l^{\approx p}$. Выражение $\frac{1}{3}\tilde{F}_l^{\approx p}$ отличается от $\frac{1}{3}\tilde{F}_l^p$ тем, что индексы $i \pm 1$, $k \pm 1$ и $i \pm 1$ заменены на $i \mp 1$, $k \mp 1$ и $i \mp 1$ соответственно. Все три варианта схемы (4.26) - (4.28) приводятся к таким системам линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} V_1^{m-2/3} = A_1 V_1^{m-2/3} + \varphi_1^{m-2/3}, \\ V_2^{m-2/3} = A_1 V_2^{m-2/3} + \varphi_2^{m-2/3}, \\ V_3^{m-2/3} = B_1 V_3^{m-2/3} + \tilde{\varphi}_3^{m-2/3}, \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\begin{cases} V_1^{m-1/3} = A_2 V_1^{m-1/3} + \varphi_1^{m-1/3}, \\ V_2^{m-1/3} = B_2 V_2^{m-1/3} + \tilde{\varphi}_2^{m-1/3}, \\ V_3^{m-1/3} = A_2 V_3^{m-1/3} + \varphi_3^{m-1/3}, \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} V_1^{m-} = B_3 V_1^{m-} + \tilde{\varphi}_1^m, \\ V_2^{m-} = A_3 V_2^m + \varphi_2^m, \\ V_3^{m-} = A_3 V_3^m + \varphi_3^m, \end{cases} \quad (4.31)$$

где векторы V_l^p , φ_l^p , $\tilde{\varphi}_l^p$ определены таким образом:

$$\begin{aligned} V_l^p &= \{U_{li,j,k}^p\}, \quad \varphi_l^p = \left\{ \frac{1}{3} F_{li,j,k}^p \right\} \text{ и} \\ \tilde{\varphi}_l^p &= \left\{ \frac{1}{3} \tilde{F}_{li,j,k}^p \right\} \text{ -для первого варианта,} \\ \tilde{\varphi}_l^p &= \left\{ \frac{1}{3} \tilde{\approx} F_{li,j,k}^p \right\} \text{ -для второго варианта} \\ \tilde{\varphi}_l^p &= \left\{ \frac{1}{6} (\tilde{F}_{li,j,k}^p + \tilde{\approx} F_{li,j,k}^p) \right\} \text{ -для третьего варианта,} \end{aligned}$$

$l = 1, 2, 3$, $p = m - 2/3, m - 1/3, m$, $i = 1, \dots, N_1$, $j = 1, \dots, N_2$, $k = 1, \dots, N_3$.

A_l и B_l – трехдиагональные матрицы и имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & d_N & 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Элементы матриц A_l и B_l определяются следующим образом:

1) для первого варианта схемы (4.26) – (4.28):

$$\begin{aligned} A_l : C_{s_1} &= -\frac{\bar{U}_{4-ls_1}^{+p}}{a}, \quad d_{s_2} = -\frac{\bar{U}_{4-ls_2}^p}{a}, \\ B_l : C_{s_1} &= -\frac{\bar{U}_{4-ls_1}^{+p} - b}{a + 2b}, \quad d_{s_2} = -\frac{\bar{U}_{4-ls_2}^p - b}{a + 2b}; \end{aligned}$$

2) для второго варианта

$$\begin{aligned} A_l : C_{s_2} &= -\frac{\bar{U}_{4-ls_2}^{+p}}{a}, \quad d_{s_3} = -\frac{\bar{U}_{4-ls_3}^p}{a}, \\ B_l : C_{s_2} &= -\frac{\bar{U}_{4-ls_2}^{+p} - b}{a + 2b}, \quad d_{s_3} = -\frac{\bar{U}_{4-ls_3}^p - b}{a + 2b}; \end{aligned}$$

3) для третьего варианта:

$$A_l : C_{s_\alpha} = -\frac{\bar{U}_{4-ls_1}^{+p} + \bar{U}_{4-ls_2}^{+p}}{2a}, \quad d_{s_\beta} = -\frac{\bar{U}_{4-ls_2}^p + \bar{U}_{4-ls_3}^p}{2a},$$

$$B_l : C_{s_\gamma} = -\frac{\bar{U}_{4-ls_1}^{+p} + \bar{U}_{4-ls_2}^{+p} - 2b}{2(a+2b)}, \quad d_{s_\eta} = -\frac{\bar{U}_{4-ls_2}^p + \bar{U}_{4-ls_3}^p - 2b}{2(a+2b)},$$

где s_i - номер узла, $i = 1, 2, 3$; $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma, s_\eta = 1, 2, \dots, N$.

Теперь введем новые обозначения:

$$X^p = \{V_l^p\}, \quad D^p = \{D_l^p\}, \quad \text{где } l = 1, 2, 3, \quad p = m - 2/3, m - 1/3, m;$$

$$D = \{D_l^p\} = (\varphi_1^p, \varphi_2^p, \tilde{\varphi}_3^p) \quad \text{при } p = m - 2/3;$$

$$D = \{D_l^p\} = (\varphi_1^p, \tilde{\varphi}_2^p, \varphi_3^p) \quad \text{при } p = m - 1/3;$$

$$D = \{D_l^p\} = (\tilde{\varphi}_1^p, \varphi_2^p, \varphi_3^p) \quad \text{при } p = m;$$

Тогда системы (4.29), (4.30) и (4.31) можно переписать в виде

$$\begin{cases} X^{m-2/3} = AX^{m-2/3} + D^{m-2/3}, \\ X^{m-1/3} = BX^{m-1/3} + D^{m-1/3}, \\ X^m = CX^m + D^m, \end{cases} \quad (4.33)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} B_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Лемма 4.2 Если выполнено условие

$$|U_h^p| < \frac{2\nu}{h^2} \quad (4.34)$$

где $p = m - 1, m - 2/3, m - 1/3, m = 0, \dots, M - 1$, то матрицы A_l и

B_l , $l = 1, 2, 3$ являются неотрицательными якобиевыми циклическими

индекса 2 матрицами. (см. [77])

Доказательство. Структура квадратных матриц A_l и B_l для всех трех вариантов схемы (4.26) – (4.28), по определению является трехдиагональной матрицей: все элементы главной диагонали равны нулю, элементы верхней диагонали равны c_1, \dots, c_{N-1} , а элементы нижней диагонали равны d_2, \dots, d_N . Если выполнено условие (4.34), то элементы $c_{i-1}, d_i, i = 2, \dots, N$ будут положительными.

Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 4.4 *Всегда можно выбрать $\tau > 0$ таким, что выполнено условие*

$$\rho(A_l) < 1, \rho(B_l) < 1, \rho(A) < 1, \rho(B) < 1, \rho(C) < 1 \quad (4.35)$$

для всех $l = 1, 2, 3$.

Доказательство. Используя лемму, выберем h , затем, применяя последовательные утверждения (19.2) и (18.9) из [77], выберем $\tau > 0$, удовлетворяющий условию (4.35).

Легко заметить, что матрицы A, B и C также являются неотрицательными якобиевыми циклическими индекса 2 матрицами, если выполнено (4.34). Теперь к уравнениям системы (4.33) можно последовательно применять векторный алгоритм [44], [45]. Решаем уравнения системы (4.33) последовательно для фиксированных $m = 1, 2, \dots, M$. Справедливы оценки вида типа (6.1.29) из [15].

5

Решение задач фильтрации

5.1 Модель Маскета–Леверетта

Рассмотрим математическую модель процесса фильтрации двух несмешивающихся жидкостей (воды и нефти) через пористую среду. При описании этой модели применяется концепция сплошной среды. Рассматривается двухкомпонентная жидкость как совокупность континуумов. Они заполняют один и тот же объем Ω несжимаемого порового пространства. Для каждого из континуумов вводят свою насыщенность S_i , плотность ρ_i , скорость фильтрации \vec{V}_i и давление p_i . Уравнения неразрывности для каждой компоненты жидкости записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i \rho_i s_i) + \operatorname{div}(\rho_i \vec{V}_i) = 0 \quad i = 1, 2. \quad (5.1)$$

А обобщение закона Дарси, предложенное Маскетом для многофазной фильтрации для каждой из жидкостей имеет вид

$$\vec{V}_i = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad (5.2)$$

где K_0 – коэффициент фильтрации пористой среды для однородной жидкости (или симметричный тензор для анизотропной среды), μ – коэффициент

динамической вязкости, \bar{k}_{0i} – относительные фазовые проницаемости. При этом \bar{k}_{0i} зависит от насыщенности s_i , так как часть порового пространства занята другой жидкостью, $\bar{k}_{0i} = k_{0i}(s_i)$. По определению насыщенности s_i меняются в пределах $0 < s_i^0 \leq s_i \leq 1 - s_j^0$, $i \neq j$, $s_1 + s_2 = 1$, и при достижении значений $s_i = s_i^0$ движение i -й компоненты прекращается, что обеспечивается выполнением условий $\bar{k}_{0i}(s_i^0) = 0$, $i = 1, 2$. Здесь $s_i^0 > 0$ – остаточная нефте- или водонасыщенность. Это значение s_i достигается при уменьшении насыщенности s_i одной из жидкостей. При уменьшении s_i достигается некоторое критическое состояние и каналы разрушаются, становятся прерывистыми и в конечном итоге остаются лишь изолированные области, занятые этой жидкостью.

На границе $\partial\Omega_{1,2}$ существует скачок фазовых давлений, который называют капиллярным давлением:

$$p_2 - p_1 = p_c(x, s), \quad s \equiv \frac{s_1 - s_1^0}{1 - s_1^0 - s_2^0}, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (5.3)$$

капиллярное давление p_c определяется формулой Лапласа

$$p_c(x, s) = \bar{p}_c(x)l(s), \quad \bar{p}_c(x) = \sigma \cos \theta (m/|K_0|)^{1/2},$$

где σ – коэффициент межфазного натяжения, $l(s)$ – Функция Леверетта, $|K_0| = \det\{K_y\}$, если K_0 симметричный тензор фильтрации анизотропной пористой среды. Капиллярное давление p_c определяется кривизной $\partial\Omega_{1,2}$, насыщенностью s_1 смачивающей жидкости, характеристиками пористой среды и жидкостей. Система уравнений (5.1) – (5.3) относительно \vec{V}_i, p_i, ρ_i и $s = (s_1 - s_1^0)/(1 - s_1^0 - s_2^0)$ несмешивающихся жидкостей, движущихся в пористой среде, в изотермическом случае замыкается заданием уравнений состояния жидкостей

$$\rho_i = \rho_i(p_i), \quad i = 1, 2. \quad (5.4)$$

Мы предположим обе жидкости несжимаемыми, то есть $\rho_i = const$. Модель (5.1) – (5.4) называется моделью Маскета–Левретта. Функциональные параметры m, \bar{k}_{0i}, K_0 и l модели Маскета–Левретта предполагаются заданными функциями соответствующих переменных x или s и все числовые параметры (μ_i, ρ_i, s_i^0) фиксированными. Фазовые проницаемости $k_{0i}(s) = \frac{1}{\mu_i} \bar{k}_{0i}(s)$ обладают свойствами $k_{0i}(s) > 0$, $s \in (0, 1)$, $k_{01}(0) = k_{02}(1) = 1$

Начально–краевая задача для уравнений (5.1) – (5.4)

Пусть фильтрация неоднородной жидкости происходит в конечной области Ω переменного $x = (x_1, x_2, x_3)$. Граница области Ω $\partial\Omega$ состоит

из непроницаемой поверхности $\partial\Omega_0$ и поверхности $\partial\Omega_1$, соответствующей нагнетательным и эксплуатационным скважинам и заданным границам $\partial\Omega_2 \subset \partial\Omega_1$ с однородной неподвижной жидкостью.

Условия непротекания на $\partial\Omega_0$ для обеих фаз имеют вид

$$(\vec{V}_i \cdot \vec{n}) = 0, \quad (x, t) \in S_0 = \partial\Omega_0 \times (0, T), \quad (5.5)$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $S_i = \partial\Omega_i \times (0, T)$, $i = 1, 2$.

На участках $\partial\Omega_2 \subset \partial\Omega_1$, граничащих с однородной неподвижной жидкостью, заданы давление в смачивающей фазе, совпадающее с гидростатическим давлением в неподвижной жидкости, и величина насыщенности (например, на кровле $s = 0$, а на подошве $s = 1$):

$$p_1 = p_{10}(x, t), \quad s = s_0(x, t), \quad (x, t) \in S_2 \quad (5.6)$$

Условие (5.6) можно задавать и на участках $\partial\Omega_1$, соответствующих скважинам. На $\partial\Omega_1$ предполагается известным расход смеси (дебиты скважин)

$$((\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot \vec{n}) = R(x, t), \quad (x, t) \in S_1 \quad (5.7)$$

Если на $\partial\Omega_1$ пренебречь нормальной составляющей градиента капиллярного давления p_c по сравнению с градиентами фазовых давлений и не учитывать сил тяжести, то $(\nabla p_1 \cdot \vec{n}) = (\nabla p_2 \cdot \vec{n})$, или согласно (5.2) $((k_{02}\vec{V}_1 - k_{01}\vec{V}_2) \cdot \vec{n}) = 0$, $(x, t) \in S_1$.

С помощью (5.7) из полученного соотношения имеем

$$(\vec{V}_i \cdot \vec{n}) = \frac{k_{0i}}{k_{01} + k_{02}} R(x, t), \quad (x, t) \in S_1. \quad (5.8)$$

(5.8) показывает, что закачка и отбор смеси производятся пропорционально подвижности фаз. Осталось задать начальное распределение насыщенности

$$s(X, 0) = \tilde{s}_0(X, 0), \quad X \in \Omega \quad (5.9)$$

В [9] доказано существование обобщенных решений пространственных краевых задач ((5.1) – (5.9)) для искомых функций насыщенности $s(x, t)$ и "среднего" давления $p(x, t)$ и установлены важные качественные свойства решений: принцип максимума для насыщенности $s(x, t)$, гарантирующий выполнение неравенств $0 \leq s \leq 1$, свойства гладкости в зависимости от гладкости данных задачи, единственность решений в невырождающемся случае, когда

$$0 < \delta \leq s(x, t) \leq 1 - \delta.$$

Отметим, что построение эффективных численных и приближенных методов решения пространственных задач фильтрации в настоящее время является весьма актуальным.

Постановка задачи в насыщенности и давления (s, p) .

Из уравнения неразрывности (5.1) получают

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (5.10)$$

Здесь \vec{V} – вектор скорости фильтрации смеси и $|\vec{V}|$ – полный удельный расход смеси. Введя новую функцию – "приведенное" давление

$$p = p_1 - \int \frac{\partial p_c}{\partial s} \frac{k_{02}}{k} d\xi + \rho_1 \cdot g \cdot h, \quad (5.11)$$

где $k = k_{01} + k_{02}$, $g \nabla h = \vec{g}$, мы вектор \vec{V} представляем через ∇p и s и он не зависит от ∇s :

$$\vec{V} = -(K \nabla p + \vec{f}) \equiv \vec{V}(s, p), \quad K = k \cdot K_0 \quad (5.12)$$

где

$$\vec{f} = K \int_s^1 \nabla_x \frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{02}}{k} \cdot d\xi + K_2 \nabla p_c + K_2 (\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{g}$$

Здесь $K_i = K_0 \cdot k_{0i}(s)$ – симметричный тензор фазовой проницаемости, $K_0(x)$ – тензор фильтрации для однородной жидкости. Также, используя (5.11), имеем

$$-V_1 = K_1 (\nabla p_1 + p_1 \cdot \vec{g}) = K (\nabla p - \frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{02}}{k} \cdot \nabla s + \int_s^1 \nabla_x \frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{02}}{k} \cdot d\xi)$$

Обозначим через $a = -\frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{01} k_{02}}{k_{01} + k_{02}}$ и $\vec{f}_0 = K \int_s^1 \nabla_x \frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{02}}{k} \cdot d\xi$ Тогда получим

$$-\vec{V}_1 = K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0 \equiv -\vec{V}_1(s, p). \quad (5.13)$$

используя (5.12), находят $K_1 \nabla p = -K_1 K^{-1} (\vec{V} + \vec{f})$, и учитывая $K_1 = k_{01} K_0$ и $K = k \cdot K_0$ получают $K_1 K^{-1} = k_{01} K^{-1} \equiv b(s)$. Тогда (5.13) примет вид

$$-\vec{V}_1 = K_0 a \nabla s - b \vec{V} + \vec{F}, \quad \vec{F} = \vec{f}_0 - b \vec{f}. \quad (5.14)$$

Подставляя в уравнение неразрывности для первой фазы выражение (5.13), приходим к системе относительно $\{s, p\}$:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0) \equiv -\operatorname{div} \vec{V}_1(s, p), \quad (5.15)$$

$$\operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) \equiv -\operatorname{div} \vec{V}(s, p) = 0 \quad (5.16)$$

а подстановка (5.14) в уравнение неразрывности приведет к эквивалентной системе относительно $\{s, p, \vec{V}\}$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_1 a \nabla s - b \vec{V} + F), \quad m = \bar{m}(1 - s_1^0 - s_2^0) \quad (5.17)$$

$$\operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) = 0, \quad -\vec{V} = K \nabla p + \vec{f}. \quad (5.18)$$

Здесь тензор фильтрации $K_0(x)$ симметричный и положительно определенный, то есть

$$k_{0ij} = k_{0ji}, \quad \nu |\xi|^2 \leq (K_0 \xi, \xi) = \sum_{i,j} k_{0ij} \xi_i \xi_j \leq \nu^{-1} |\xi|^2, \quad \nu > 0, \quad |\xi|^2 = \sum_i \xi_i^2.$$

Капиллярное давление p_c и относительные фазовые проницаемости k_{01} и k_{02} обладают свойствами $\partial p_c / \partial s < 0$, $k = k_{01} + k_{02} > 0$. Поэтому с учетом

$$k_{0i}(s) > 0, \quad s \in (0, 1), \quad k_{01}(0) = k_{02}(1) = 1, \quad a = -\frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{01} k_{02}}{k_{01} + k_{02}}$$

имеем $a(x, s) > 0$ при $s \in (0, 1)$ и $a(x, 0) = a(x, 1) = 0$.

Начально–краевая задача для (5.15) – (5.16).

Рассматривается фильтрационное течение в заданной конечной области Ω с кусочно–гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $Q = \Omega \times [0, T]$, $S_i = \partial\Omega_i \times [0, T]$, \vec{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Граничные данные (5.5) – (5.8) перепишем применительно к функциям s, p . Условия непротекания на $\partial\Omega_0$ для обеих фаз

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V}_1 \cdot \vec{n} = 0, \quad (x, t) \in S_0 = \partial\Omega_0 \times [0, T]. \quad (5.19)$$

Краевые условия (5.6) – (5.8) преобразуются соответственно к виду

$$p = p_0(x, t), \quad s = s_0(x, t), \quad (x, t) \in S_2 = \partial\Omega_2 \times [0, T], \quad (5.20)$$

$$-(K_0 \nabla p = \vec{f}) \cdot \vec{n} \equiv \vec{V} \cdot \vec{n} = R(x, t), \quad (x, t) \in S_1 = \partial\Omega_1 \times [0, T], \quad (5.21)$$

$$-(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0) \cdot \vec{n} \equiv \vec{V}_1 \cdot \vec{n} = b \cdot R(x, t), \quad (x, t) \in S_1 \quad (5.22)$$

При $R(x, t) = 0$ равенства (5.21) и (5.22) эквивалентны (5.19), то $\partial\Omega_0$ включим в $\partial\Omega_1$ и предположим, что $\partial\Omega_1$ состоит из нескольких компонент,

на части которых $R = 0$. Итак, $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. Начальное условие задается лишь для насыщенности $s(x, t)$:

$$s(x, 0) = \tilde{s}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.23)$$

Компоненты $\partial\Omega_1$ или $\partial\Omega_2$ на $\partial\Omega$ могут отсутствовать, то есть $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_1$ или $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_2$. В случае $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_1$ закон сохранения массы смеси в области Ω приводит к следующему необходимому условию:

$$\int_{\Omega} p(x, t) dx = \int_{\partial\Omega} R(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5.24)$$

Коэффициенты уравнений (5.15) – (5.18) и граничных условий (5.19) – (5.23) имеют вид:

$$a = a(x, s) = -\frac{\partial p_c(x, s)}{\partial s} \cdot \frac{k_{01}(s) \cdot k_{02}(s)}{k(s)},$$

$$k(s) = k_{01}(s) + k_{02}(s), \quad b = b(s) = -\frac{k_{01}(s)}{k(s)} \equiv K_1 \cdot K^{-1},$$

$$K_i = K_0(x) \cdot k_{0i}(s), \quad K = k \cdot K_0 = K_0(x)(k_{01}(s) + k_{02}(s)),$$

$$\vec{f} = \vec{f}(x, s) = K(x, s) \cdot K_1^{-1}(x, s) \cdot \vec{f}_0(x, s) + K_2(x, s) \nabla_x p_c(x, s) +$$

$$K_2(x, s)(\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{g}, \quad K = K(x, s) = K_1(x, s) + K_2(x, s),$$

$$\vec{F} = \vec{F}(x, s) = \vec{f}_0(x, s) - b(s) \cdot \vec{f}(x, s) = -k_{01} k_{02} k^{-1}$$

$$\times K_0 [\nabla_x p_c + (\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{g}], \quad K_i(x, s) = k_{0i}(s) \cdot K_0(x), \quad i = 1, 2,$$

$$\vec{f}_0 = \vec{f}_0(s) = K_0 \cdot \int_s^1 \nabla_x \frac{\partial p_c(x, s)}{\partial s} \Big|_{s=\xi} \cdot \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} d\xi. \quad (5.25)$$

Некоторые упрощения

Если суммарная скорость фильтрации $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ или $\vec{V} = -(K \nabla p + \vec{f}) \equiv \vec{V}(s, p)$ (см. (5.10) и (5.12)) не будет зависеть от s , то есть, если коэффициенты $K = K_0(s)k(s)$ и $\vec{f}(x, s)$ (см. (5.25)) не зависят от s , то система уравнений (5.15), (5.16) распадается и можно последовательно определить \vec{V} и $s_i(x, t)$.

Из

$$\vec{f}(x, s) = k \cdot K_0 \cdot \int_s^1 \nabla_s \frac{\partial p_c(x, s)}{\partial s} \Big|_{s=\xi} \cdot \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} d\xi + K_2 \cdot \nabla p_c + K_2(\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{g}$$

следует, что это предположение верно:

1. При $k = const$ для смешивающихся жидкостей. А для несмешивающихся жидкостей существенное отклонение k от постоянной наблюдается лишь вблизи предельных значений $s = 0, 1$ приведенной насыщенности.

2. При $\frac{1}{\bar{m}(x)} \det K_0(x) = const$, при этом $p_c = p_c(s)$, то есть $\frac{\partial p_c}{\partial x_i} = 0$ или $\nabla_x p_c = 0$ ($\nabla_x \frac{\partial p_c}{\partial s} = 0$).

3. Если не учитываются силы тяжести, то есть $g = 0$ или жидкости имеют одинаковые плотности $\rho_1 = \rho_2$. Предположения 2. и 3. обеспечивают выполнение условия $\partial \vec{f} / \partial s = 0$.

5.1.1 Стационарная задача

Стационарная краевая задача для $(s(x), p(x))$ имеет вид:

$$\operatorname{div}(K_0 a \cdot \nabla s - b \vec{V} + \vec{F}) \equiv -\operatorname{div} \vec{V}_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (5.26)$$

$$s = s_0(x) \text{ на } \partial\Omega_2, \quad (5.27)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{n} = b \cdot R \text{ на } \partial\Omega_1, \quad (5.28)$$

$$\operatorname{div}(K \cdot \nabla p + \vec{f}) \equiv -\operatorname{div} \vec{V} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (5.29)$$

$$p = p_0 \text{ на } \partial\Omega_2, \quad (5.30)$$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = R \text{ на } \partial\Omega_1, \quad (5.31)$$

Если коэффициенты $K = K_0(x)k(s)$ и $\vec{f}(x, s)$ не зависят от s , то из (5.29) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(K \cdot \nabla p + \vec{f}) &\equiv -\operatorname{div}(C_1 K_0(x) \cdot \nabla p(x) + \vec{f}(x)) = \\ &= C_1 \operatorname{div}(K_0(x) \cdot \nabla p(x)) + h(x) = 0, \end{aligned} \quad (5.32)$$

где $C_1 = k(s) = const$, $h(x) = \operatorname{div} \vec{f}(x)$

Предположим, что среда однородная и изотропная. Тогда из (5.32) получим

$K_0(x) = C_2 = const$ и $C_3 \Delta(x) = -h(x)$ или $\Delta p(x) = -h_1(x)$, где $C_3 = C_1 C_2$ и $h_1(x) = h(x)/C_3$. Определим \vec{V} .

$$\vec{V} = C_1 K_0(x) \nabla p(x) + \vec{f}(x) = C_3 \nabla p(x) + \vec{f}(x), \quad (5.33)$$

если среда однородная и изотропная. Итак, мы получили задачу:

$$\Delta p(x) = -h_1(x), \quad \text{в } \Omega, \quad (5.34)$$

$$p(x) = p_0, \quad \text{на } \partial\Omega_2, \quad (5.35)$$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = R, \quad \partial\Omega_1, \quad (5.36)$$

(5.34) – (5.35) является задачей Дирихле для уравнения Пуассона. Теперь рассмотрим случай, когда $\partial\Omega \equiv \partial\Omega_1$. Тогда из условия (5.24) получаем

$$\int_{\Omega} p(x) dx = \int_{\partial\Omega} R(x) dx = 0$$

Так как $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, тогда $\partial\Omega = \partial\Omega_2$. Теперь предположим, что $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega$. Тогда из (5.34) – (5.36) получаем задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta p(x) = -h_1(x), \quad \text{в } \Omega, \quad (5.37)$$

$$p(x) = p_0(x), \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (5.38)$$

Решение $p(x)$ этой задачи оценивается методом Монте–Карло. Более того методом Монте–Карло оценим $\nabla p(x)$ и $\Delta p(x)$.

5.1.2 Применение методов Монте–Карло

Оценим решения и производных от решения задачи (5.37) – (5.38) в заданной точке методами Монте–Карло.

Сформулируем алгоритмы методов Монте–Карло для оценки решения и производных от решения задачи (5.37) – (5.38).

1. Из точки $x_0 \in \Omega$ моделируем цепь $\{x_n\}$ Маркова до первого попадания в ε -окрестность границы $\partial\Omega_\varepsilon$, определим точку $x_N^* \in \partial\Omega$. Здесь x_N^* – ближайшая к последнему состоянию x_N точка границы, N – случайный номер последнего состояния цепи Маркова.

2. Соответственно плотности

$$g_{\rho, \theta, \varphi}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{2} \cdot \frac{6x(1 - x/d)}{d^2}, \quad 0 \leq x \leq d$$

в каждой случайной сфере $S(x)$, целиком лежащей в области Ω , вычисляется значение функции $\Phi(\vec{r}, \rho, \vec{\omega}) = \frac{d^2}{6} \cdot h_1(\vec{r} + \rho \cdot \vec{\omega})$. Здесь \vec{r} – радиус–вектор

точки x , $\rho = |\vec{r} - \vec{r}'|$ - случайное расстояние между центрами сфер, $\vec{\omega}$ - изотропный случайный единичный вектор, $|\vec{r} - \vec{r}'| \leq d(\vec{r}) \equiv d$, плотность $g_{\rho,\theta,\varphi}(x)$ задана в полярной системе координат.

3. Вычисляем случайную величину ξ_ε по формуле

$$\xi_\varepsilon = \Phi(x_0, \rho_0, \omega_0) + \sum_{n=1}^{N-1} \Phi(x_n, \rho_n, \vec{\omega}_n) + p_0(x_N^*).$$

Искомая оценка $p(x_0)$ в заданной точке x_0 получается осреднением по всем траекториям величины ξ_ε , то есть

$$p_\varepsilon(x_0) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\xi_\varepsilon)_i, \quad (5.39)$$

где L - количество траекторий, исходящих из точки x_0 . Теперь оценим производную по x_i ($i = 1, 2, 3$) от решения задачи (5.37) - (5.38) в точке x_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_\varepsilon(x_0)}{\partial x_i} = & \frac{1}{4\pi} \int_{|\vec{r}-x_0|<d_0} \frac{x_i(d_0^3 - |\vec{r} - x_0|^3)}{d_0^3 |\vec{r} - x_0|^3} \cdot h_1(\vec{r}) d\vec{r} + \\ & + M \left\{ 3l_i/d_0 \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi d_j} \int_{|\vec{r}-x_0|<d_j} \frac{d_j - |\vec{r} - x_j|}{|\vec{r} - x_j|} \cdot h_1(\vec{r}) d\vec{r} + p_0(x_N^*) \right] \right\} \quad (5.40) \end{aligned}$$

Здесь $l_i = l(x_i, \vec{\omega})$ - косинус углов между $\vec{\omega}$ и координатными осями x_i , $i = 1, 2, 3$, M - оператор математического ожидания. Первые интегралы в выражениях (5.39) можно оценить методом Монте-Карло по одному случайному "узлу" с плотностью

$$f_{x_i}(\vec{r}) = \frac{x_i(d_0^3 - |\vec{r} - x_0|^3)}{d_0^3 \cdot |\vec{r} - x_0|^3}, \quad |\vec{r} - x_0| < d_0 \quad (5.41)$$

Для оценки всех трех производных по x_i целесообразно использовать плотность

$$\left(\sum_{i=1}^3 f_{x_i}^2(\vec{r}) \right)^{1/2} \equiv \tilde{f}_{x_i}(\vec{r}) = \frac{d_0^3 - |\vec{r} - x_0|^3}{d_0^2 \cdot |\vec{r} - x_0|^2}, \quad (5.42)$$

где $|\vec{r} - x_0| < d_0$, $(x_1 + x_2 + x_3)^{1/2} = |\vec{r} - x_0|$.

В этом случае качество алгоритма оценивается по величине суммы дисперсии оценок соответствующих интегралов. Интегралы, стоящие под знаком

математического ожидания в (5.40), можно также оценивать по одному случайному "узлу" распределенному с плотностью

$$f(\vec{r}) = \frac{d_j - |\vec{r} - x_j|}{\vec{r} - x_j}. \quad (5.43)$$

В работе [13] приводятся алгоритмы моделирования случайных величин с заданными законами распределения, а именно с плотностью

$$1) g_{\rho, \theta, \varphi}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{2} \cdot \frac{6x(1 - x/d)}{d^2}, \quad 0 \leq x \leq d.$$

$$2) f_{\eta}(\vec{r}) = \frac{d^3 - |\vec{r} - \vec{x}|^3}{d^3 \cdot |\vec{r} - \vec{x}|^2}, \quad |\vec{r} - \vec{x}| < d.$$

Случайные величины с такими плотностями встречаются при оценивании решения $p(x)$ и производных от решения $\partial p(x)/\partial x_i$, ($i = 1, 2, 3$) задачи Дирихле для уравнения Пуассона (пункт 2 алгоритма и формула (5.40)).

Сначала рассмотрим алгоритм построения случайной величины с плотностью

$$g_{\rho}(x) = \frac{6x(1 - x/d)}{d^3}, \quad 0 \leq x \leq d.$$

Замена $y = x/d$ приводит к

$$f_{\rho}(y) = 6y(1 - y), \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (5.44)$$

Выражение (5.43) соответствует распределению второй порядковой статистики из трех выборочных значений случайной величины, равномерно распределенной в интервале (0,1). А направляющие косинусы l_i , ($i = 1, 2, 3$), то есть косинусы углов между единичным вектором $\vec{\omega}(\theta, \varphi)$ и координатными осями x_1, x_2, x_3 моделируется с помощью алгоритма:

$$1) \mu = 1 - 2 \cdot \alpha_1; \quad \xi = 1 - 2 \cdot \alpha_2; \quad \eta = 1 - 2 \cdot \alpha_3;$$

$$2) q = \xi^2 + \eta^2, \quad \text{если } q < 1, \text{ то}$$

$$3) l_1 = \mu; \quad l_2 = \xi \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)/q}; \quad l_3 = \eta \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)/q};$$

иначе выполняется пункт 2). Здесь $\alpha_i \in [0, 1]$ для $i = 1, 2, 3$ – выборочные значения случайной величины α , равномерно распределенной в $[0, 1]$.

Теперь рассмотрим алгоритм моделирования случайной величины η , распределенной с плотностью

$$f_{\eta}(\vec{r}) = \frac{d^3 - |\vec{r} - \vec{x}|^3}{d^3 \cdot |\vec{r} - \vec{x}|^2}, \quad |\vec{r} - \vec{x}| < d.$$

Переходя к полярной системе координат с центром \vec{x} и, делая замену $y = |\vec{r} - \vec{x}|/d$, найдем плотность $f_\eta(y) = 4(1 - y^3)/3$, $0 \leq y \leq 1$. Отсюда получается моделирующая формула

$$\eta = \alpha_1 \cdot \sqrt[4]{\alpha_2}. \quad (5.45)$$

Отметим, что формула (5.40) дает возможность оценить и $\Delta p_\varepsilon(x)$.

Оценивание $\vec{V}(x)$.

Используя оценки $\partial p_c(x)/\partial x_i$, ($i = 1, 2, 3$) из формулы (5.40), находим $\nabla p_\varepsilon(x)$. Далее, формула (5.33) для однородной изотропной среды дает нам

$$\vec{V}_\varepsilon(x) = C_3 \nabla p_\varepsilon(x) + \vec{f}(x). \quad (5.46)$$

Для определения насыщенности $s(x)$ рассмотрим уравнения (5.26) – (5.28). Обозначим через \vec{W} вектор

$$\vec{W} = -b\vec{V} + \vec{F} \quad (5.47)$$

Напомним, что

$$b = b(s) = K_1 \cdot K^{-1}, \quad \vec{F} = \vec{F}(x, s) = -k_{01} \cdot k_{02} \cdot k^{-1} \cdot K_0.$$

$$[\nabla_x \cdot p_c + (\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{g}] = \vec{f}_0(x, s) - b(s) \cdot \vec{f}(x, s)$$

из (5.25) и $K_1 = k \cdot K_0$. Мы предположим, что $k = const$ и $K_0 = C_2 = const$. Тогда $b = C_4 = const$. Также мы предположим, что $\vec{f}(x, s)$ не зависит от s , то есть $\vec{f}(x, s) \equiv \vec{f}(x)$. если выполнено условие 2) относительно тензора фильтрации для однородной жидкости $K_0(x)$, то есть, если $\frac{1}{\bar{m}(x)} \cdot \det K_0(x) = const$, тогда $\partial p_c/\partial x_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$). Отсюда из (5.13) следует

$$\vec{f}_0 = K \int_s^1 \nabla_x \cdot \frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{02}}{k} \cdot d\xi = \vec{f}_0(x).$$

Итак, при некоторых вышеизложенных предположениях мы получем оценку

$$\vec{W}_\varepsilon = \vec{W}_\varepsilon(x) = -b\vec{V}_\varepsilon + \vec{F} \quad (5.48)$$

Теперь, подставляя (5.48) в (5.26) и учитывая $K_0 = C_2 = const$, получим

$$\operatorname{div}(C_2 a \nabla s + \vec{W}_\varepsilon), \quad \text{в } \Omega, \quad (5.49)$$

$$s = s_0(\mathbf{x}), \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (5.50)$$

Регулярная задача

Известно, если выполнены условия

$$\operatorname{div}_x \vec{F} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad \vec{F} \cdot \vec{n} = 0, \quad (x, t) \in S_1, \quad (5.51)$$

то задача фильтрации называется регулярной. Из (5.51) следует, что почти всюду в Ω $0 \leq \delta_0 = \min s_0(x, t) \leq s(x, t) \leq \max(s_0(x, t)) = 1 - \delta_1 \leq 1$. А для стационарной задачи $0 \leq \delta_0 \leq s(x) \leq 1 - \delta_1 \leq 1$, $x \in \Omega$. На регулярных решениях $K_0(\delta_0, \delta_1) = \text{const} > 0$. Также в регулярном случае функция $a(x, s) = C_5 = \text{const}$ так как $\bar{p}_c(x) = \text{const}$ в однородной среде. Итак, мы получили для определения s опять задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Обозначим $C_6 = C_2 \cdot C_5$ и $(1/C_6) \cdot \operatorname{div} \vec{W}_\varepsilon = W_{1\varepsilon}$. Тогда

$$\Delta s = -W_{1\varepsilon}, \quad \text{в } \Omega, \quad (5.52)$$

$$s = s_0(x), \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (5.53)$$

Задача (5.52) – (5.53) решается также как задача (5.37) – (5.38) с помощью алгоритма "блуждания по сферам". Этим полностью рассмотрен случай, когда среда однородная и изотропная, а задача стационарная.

В работе [9] (см. параграф 11. Нерешенные проблемы, п. 5, стр 303) отмечается, что для практики в задачах нельзя пренебречь изменениями температуры. То есть к уравнениям фильтрации

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0) \equiv -\operatorname{div} \vec{V}_1(s, p),$$

$$\operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) \equiv -\operatorname{div} \vec{V}(s, p) = 0$$

следует добавить уравнение энергии

$$\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \nabla \theta) - \rho \vec{U} \nabla \theta, \quad (5.54)$$

где θ – температура смеси, c и χ – теплоемкость и теплопроводность смеси, ρ – средняя плотность смеси, \vec{U} – средняя скорость. Рассмотрим в однородной и изотропной среде Ω с границей $\partial\Omega$ стационарную задачу

фильтрации с учетом температуры

$$\Delta p(x) = -h_1(x) \text{ в } \Omega, \quad (5.55)$$

$$p(x) = p_0(x) \text{ на } \partial\Omega, \quad (5.56)$$

$$\vec{V}(x) = c_3 \nabla p(x) + \vec{f}(x) \text{ в } \Omega, \quad (5.57)$$

$$\vec{W}(x) = -b\vec{V}(x) + \vec{F}(x) \text{ в } \Omega, \quad (5.58)$$

$$\operatorname{div}(c_2 a \nabla s + \vec{W}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (5.59)$$

$$s = s_0(x) \text{ на } \partial\Omega, \quad (5.60)$$

$$\operatorname{div}(\chi \nabla \theta) = \rho \vec{U} \cdot \nabla \theta \text{ в } \Omega, \quad (5.61)$$

$$\theta = \theta_0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (5.62)$$

Построим алгоритм решения стационарной задачи двухфазной фильтрации с учетом температуры в однородной и изотропной среде Ω с границей $\partial\Omega$. Для этого сначала, решая с помощью алгоритма "блуждания по сферам" задачу

$$\Delta p(x) = -h_1(x) \text{ в } \Omega,$$

$$p(x) = p_0(x) \text{ на } \partial\Omega,$$

оцениваем $p_\varepsilon(x)$, $\nabla p_\varepsilon(x)$, $\Delta p_\varepsilon(x)$, где, здесь и далее индекс ε показывает на ε смещенность оценок. Определяем

$$\vec{V}_\varepsilon(x) = c_3 \nabla p_\varepsilon(x) + \vec{f}(x), \operatorname{div} \vec{V}_\varepsilon(x) = c_3 \nabla p_\varepsilon(x) + \operatorname{div} \vec{f}(x) \text{ и}$$

$$\vec{W}_\varepsilon(x) = -b\vec{V}_\varepsilon(x) + \vec{F}(x), \operatorname{div} \vec{W}_\varepsilon(x) = -b \operatorname{div} \vec{V}_\varepsilon(x) + \operatorname{div} \vec{F}(x), \text{ в области } \Omega.$$

Предположим, что задача фильтрации регулярная. Тогда для определения насыщенности s получаем задачу

$$\Delta s = -W_{1\varepsilon}, \text{ в } \Omega,$$

$$s = s_0(x), \text{ на } \partial\Omega,$$

где $W_{1\varepsilon}(x) = (1/c_6) \cdot \operatorname{div} \vec{W}_\varepsilon$. Решение задачи (5.52), (5.53) $s_\varepsilon(x)$ также оцениваем "блужданием по сферам". Теперь рассмотрим стационарное уравнение энергии в области Ω

$$\operatorname{div}(\chi \nabla \theta) - \rho \vec{U} \cdot \nabla \theta = 0 \text{ в } \Omega, \quad (5.63)$$

Предположим, что на границе $\partial\Omega$ области Ω $\theta = \theta_0$ и χ , ρ и \vec{U} – постоянные величины. В этом случае получают задачу

$$\Delta \theta - 1 \cdot \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (5.64)$$

$$\theta = \theta_0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (5.65)$$

где $c_1 = \frac{\rho}{\Xi} = \text{const}$, $u_i (i = 1, 2, 3)$ – компоненты вектора \vec{U} . Моделирование цепи Маркова, на траекториях которой строятся оценки решения задачи (5.64), (5.65), основано на методе отбора фон Неймана [15]. Рассмотрим более общий случай. Пусть задан эллиптический оператор

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \tilde{c}(x), \quad (5.66)$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$ и $\tilde{c}(x)$ – вещественные измеримые функции, определенные в Ω . Положим, что матрица старших коэффициентов $A(x) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ симметричная. Через $D(x) \subset \Omega$ обозначим семейство областей, где известна функция Грина для данного оператора. Например, семейство шаров максимального радиуса с центром в x . $D(x) = \{y : r \leq R(x)\}$. Пусть $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$ – собственные числа матрицы $A(x)$, а r – расстояние между точками x и y , $r = |x - y|$. Тогда в силу условия эллиптичности $\lambda_1(x) \geq \nu$, а из условий на коэффициенты $a_{ij}(x)$ следует, что $\lambda_n(x) \leq \nu_1 = \text{const} < +\infty$. Определим функцию $\sigma(x, y)$ равенством

$$\sigma(x, y) = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) (x_i - y_i) (x_j - y_j) \right)^{1/2}, \quad R_1 = \max_{y \in \Omega} \sigma(x, y).$$

Для произвольной суммируемой на $[0, R_1]$ функции $p(\sigma)$ определим

$$q(R) = \int_0^R p(\sigma) \text{ и } \mu(x) = (q(R) \sigma_n (n-2) |A(x)|^{1/2})^{-1},$$

где σ_n – площадь поверхности сферы радиуса 1 в R^n .

Теперь для случая $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \Delta$, где Δ – оператор Лапласа, опишем процесс моделирования цепи Маркова. Для этого используем следующую плотность (мажоранту) $p_2(x, y) = 2^{\frac{\nu_1}{\nu}} \mu(x) (n-2) p(\sigma) \sigma^{1-n}$ в общем случае. В качестве мажорантной плотности, выбрав плотность $p_2(x, y)$, можно легко построить цепь Маркова по методу Неймана, так как моделирование $p_2(x, y)$ не вызывает затруднений. Для моделирования основной цепи Маркова с плотностью $p_1(x, y)$ используем неравенство $\alpha \cdot p_1(x, y) \leq p_2(x, y)$, где $\alpha \in [0, 1]$ – равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина. Эффективность моделирования $p_1(x, y)$ с мажорантой $p_2(x, y)$ равна $1/2$. Отсюда среднее число проб для получения одной реализации равно 2.

5.2 Нестационарная задача

Рассмотрим начально-краевую задачу в области $Q = \Omega \times [0, T]$. Обозначим через $\partial Q = \partial\Omega \times [0, T]$. Краевые условия остаются такими же как в случае стационарной задачи с учетом упрощения. Добавляется лишь начальное условие для насыщенности $s(x, t)$ в регулярной задаче; $s(x, 0) = \tilde{s}^0(x)$ в Ω , то есть получаем задачу:

$$\Delta p(x, t) = -h_1(x, t) \text{ в } Q, \quad (5.67)$$

$$p(x, t) = p_0(x, t) \text{ на } \partial Q, \quad (5.68)$$

$$m \cdot \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} - \Delta s(x, t) = -W_{1\varepsilon}, \text{ в } Q, \quad (5.69)$$

$$s(x, 0) = \tilde{s}^0(x), \text{ в } \Omega, \quad (5.70)$$

$$s(x, t) = s_0(x, t), \text{ на } \partial Q, \quad (5.71)$$

Задачу (5.67) – (5.68) решаем также как задачу (5.37) – (5.38) – "блужданием по сферам". Производные от решения $\nabla p, \Delta p$ определяются также. А задача (5.69) – (5.71), после дискретизации только по временной переменной, сводится к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца. Ее решаем "блужданием по сферам" или "блужданием по границам". Шаги дискретизации по временной переменной для функции p и s совпадают.

5.2.1 Моделирования $\varepsilon(\delta)$ -смещенной оценки решения

Опишем схему моделирования цепи Маркова, на траекториях которой строятся оценки. Пусть ограниченная область Ω в R^n , $n \geq 3$, $\partial\Omega$ – граница области Ω . Для функции $u \in C^2(\Omega)$ рассматривается оператор

$$Mu \equiv \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^m b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u,$$

где коэффициенты $a_{ik}(x), b_k(x), c(x)$ – вещественные измеримые функции, определенные в Ω . Положим $a_{ik} = a_{ki}$. Допустим, что оператор M эллиптический. Для непрерывной на границе $\partial\Omega$ функции ϕ , измеримой f и эллиптического оператора M рассмотрим задачу Дирихле

$$Mu(x) = -f(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.72)$$

$$[2mm]u(x) = \phi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.73)$$

С помощью формулы Грина и теоремы о среднем значении получают интегральное представление для решения $u(x)$ краевой задачи (5.72) – (5.73)

$$u(x) = \int_{T(x)} k(x, y)u(y)dy + \int_{T(x)} l(y, x)f(y)dy, \quad (5.74)$$

$$k(x, y) = N_y l(y, x) \geq 0$$

Здесь

$$N_y \equiv a_{ik}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} - \left(b_k(y) - 2 \frac{\partial a_{ik}(y)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \left(\frac{\partial^2 a_{ik}(y)}{\partial y_i \partial y_k} + c(y) - \frac{\partial b_k(y)}{\partial y_k} \right);$$

$l(y, x)$ – функция Леви. Отметим, что при $c \leq 0$ ядро $k(x, y)$ – субстохастическое, то есть $\int_{T(x)} k(x, y)dy \leq 1$. $T(x) \subset \Omega$ – замкнутая область, удовлетворяет условию Гельдера с показателем 1. Представление (5.74) позволяет строить несмещенные оценки для решения задачи (5.72) – (5.73). Можно показать, что любое регулярное решение задачи (5.72) – (5.73) удовлетворяет уравнению (5.74) и граничному условию (5.73). Определим оператор K , действующий на функцию из $C(\bar{\Omega})$ по формуле

$$(Ku)(x) = \begin{cases} \int_{T(x)} k(x, y)u(y)dy, & x \in \Omega \\ u(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.75)$$

Рассмотрим задачу: для $\varphi \in C(\partial\Omega)$ и $F \in C(\Omega)$ найти $u \in C(\bar{\Omega})$ такую, что

$$\begin{cases} u(x) = (k \cdot u)(x) + F(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.76)$$

Если $F(x) = \int_{T(x)} l(y, x)f(y)dy$, то решение задачи (5.76) является решением задачи (5.72) – (5.73). Спектральный радиус оператора K равен единице, поэтому нельзя воспользоваться стандартными оценками, применяемыми для решения интегральных уравнений второго рода методами Монте–Карло. В этой схеме воспользуемся оценками, основанными на теории мартингалов. В этом случае проще анализировать дисперсию оценок. Определим обрывающуюся цепь Маркова с переходной плотностью $p(x, y) =$

$k(x, y)$, $y \in T(x)$. Вероятность обрыва $g(x) = 1 - \int_{T(x)} k(x, y) dx$ стремится к нулю при $x \rightarrow \partial\Omega$, поэтому траектория цепи может иметь бесконечную длину. Пусть B – множество траекторий, имеющих бесконечную длину. Тогда справедлива

Лемма 5.1 Пусть задача (5.76) разрешима для $F \equiv 0$, $\phi \equiv 1$. Если существует функция $0 \leq G \in C(\Omega)$, такая, что задача (5.76) для $F = G$, $\phi \equiv 0$ разрешима, то для цепи $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, с переходной плотностью $p(x, y)$ почти все траектории бесконечной длины приближаются к границе $\partial\Omega$:

$$P_x(\text{dist}(x_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 | B) = 1, \quad (5.77)$$

причем $P_x(B) > 0$.

Следствие 5.1 Для марковской цепи $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, определяемой переходной плотностью $p(x, y) = k(x, y) = N_y l(y, x)$, выполняется (5.77)

Доказательство. В качестве $G(x)$ достаточно взять $G(x) = \int_{T(x)} l(y, x) dy$.

Для решения $u(x)$ задачи (5.76) будем строить оценки на траекториях цепи $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ с переходной плотностью

$$p(x, y) = \begin{cases} k(x, y), & y \in T(x), \\ 0, & y \notin T(x) \end{cases}$$

Определим последовательность оценок $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ равенством

$$\eta_n = \sum_{j=0}^{n-1} F(x_j) \chi_j + \chi_n u(x_n),$$

где χ_j – индикатор события (момент обрыва цепи $> i$). Через $\{\mathfrak{F}_n\}_{n=0}^\infty$ обозначим последовательность σ -алгебр, \mathfrak{F}_n порождена цепью до момента времени n . Очевидно, что $M_x \eta_n = u(x)$, то есть оценки η_n являются несмещенными. Последовательность $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ образует мартингал относительно $\{\mathfrak{F}_n\}_{n=0}^\infty$.

Пусть τ_1 – момент обрыва цепи (время жизни), τ_2 – момент попадания цепи в δ – окрестность границы, $\tau_\delta = \min(\tau_1, \tau_2)$.

Последовательность $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ несмещенных оценок для решения $u(x)$ задачи (5.76) называют *допустимой*, если существует последовательность σ -алгебр $\{\mathfrak{R}_n\}_{n=0}^\infty$ таких, что $\mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{R}_n$ и $\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{R}_{n+1}$, а ξ_n имеет вид $\xi_n = \zeta_n + \chi_n u(x_n)$, где $\zeta_n \mathfrak{R}_n$ – измерима.

Для допустимой последовательности оценок $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ определим случайную величину ξ_δ равенством

$$\xi_\delta = \zeta_{\tau_\delta} + \varphi(x_{\tau_\delta}^*), \quad (5.78)$$

где $x_{\tau_\delta}^*$ обозначена ближайшая к x_{τ_δ} точка границы. определение корректно, так как $\tau_\delta < +\infty$ в силу леммы (5.1).

Теорема 5.1 *Если допустимая последовательность оценок $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ образует квадратично интегрируемый мартингал относительно семейства σ -алгебр $\{\mathfrak{R}_n\}_{n=0}^\infty$, указанного в ее определении, то случайная величина ξ_δ является $\varepsilon(\delta)$ -смещенной оценкой для $u(x)$, ее дисперсия есть ограниченная функция параметра δ ($\varepsilon(\delta)$ – модуль непрерывности функции u). [15].*

Вернемся теперь к последовательности оценок $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$.

Лемма 5.2 *Если задача (5.76) разрешима при замене $F(x)$ на $|F(x)|$ и $F^2(x)$, $\varphi \equiv 0$, то мартингал $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ – квадратично интегрируемый.*

Определим для исходной задачи (5.72) – (5.73) последовательность несмещенных оценок, которые получаются из η_n оценкой $F(x_i)$ по одному

свободному узлу с плотностью $l(y, x_i)/h(x_i)$,

$$h(x) = \int_{T(x)} l(y, x) dy = \frac{1}{2mq(R)} \int_0^R \rho^2 p(\rho) d\rho.$$

Пусть $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, \dots$ – независимые случайные векторы с плотностями $l(y, x_i)/h(x_i)$, \mathfrak{R}_n – σ -алгебра, порожденная $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$. Последовательность несмещенных оценок

$$\zeta_n \sum_{j=0}^{n-1} h(x_j) f(y_j) \chi_j + \chi_n u(x_n) \quad (5.79)$$

образует мартингал относительно $\{\mathfrak{R}_n\}_{n=0}^\infty$. Из леммы (5.4) следует

Лемма 5.3 *Мартингал $\{\zeta_n\}_{n=0}^\infty$ – квадратично интегрируемый.*

Применяя теорему (5.1) к мартингалу $\{\zeta_n\}_{n=0}^\infty$ получим окончательный результат

Теорема 5.2 *Пусть $\varepsilon(\delta)$ – модуль непрерывности решения $u(x)$ задачи (5.72) – (5.73). Тогда оценка ζ_δ , определяемая по $\{\zeta_n\}_{n=0}^\infty$ формулой (5.78), является $\varepsilon(\delta)$ -смещенной для $u(x)$. Дисперсия $D\zeta_\delta$ – ограниченная функция параметра δ . [15].*

Для практической реализации алгоритма нужно научиться моделировать цепь $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, на траекториях которой строятся оценки, и плотность $l(y, x)/h(x)$.

5.3 Регулярные и вырождающиеся задачи

Следуя работе [9] рассмотрим следующую начально-краевую задачу для насыщенности и приведенного давления (s, p) в заданной конечной области

$\Omega \in R^n$ ($n \geq 2$) с границей $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times [0, T]$, $G = \partial\Omega \times [0, T]$:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0), \quad (x, t) \in Q, \quad (5.80)$$

$$\operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (5.81)$$

$$s(x, t) = s_0(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (5.82)$$

$$p(x, t) = p_0(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (5.83)$$

$$s(x, 0) = s^0(x, 0), \quad x \in \Omega, \quad (5.84)$$

где коэффициенты $K_0, a, K_1, \vec{f}_0, K, \vec{f}$, граничные и начальные условия - заданные функции.

Для приближенного решения задачи (5.80) – (5.84) в работе [9] предлагаются два метода:

Метод 5.1

$$L_1 s_{i+1} \equiv -m \frac{\partial s_{i+1}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{K}(x, s) \nabla s_{i+1}) + \vec{B}(x, s_i) \nabla s_{i+1} +$$

$$+ D(x, s_i) \nabla p_{i+1} \nabla s_{i+1} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (5.85)$$

$$s_{i+1}(x, t) = s_0(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (5.86)$$

$$s_{i+1}(x, 0) = s^0(x, 0), \quad x \in \Omega, \quad (5.87)$$

$$L_2 p_{i+1} \equiv \operatorname{div}(K(x, s) \nabla p_{i+1} + \vec{f}(x, s)) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (5.88)$$

$$p_{i+1}(x, t) = p_0(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (5.89)$$

где $m\bar{K} = K_0 a$, $m\vec{B} = \bar{K} \nabla m + \vec{f}_0 - b\vec{f}$, $mD = kb'$, $b(s) = K_1 K^{-1}$, $k = k_{01} + k_{02}$, k_{0i} – фазовые проницаемости для однородного изотропного грунта, ($i = 1, 2$).

Метод 5.2 Разбив интервал времени $[0, T]$ на N частей ($\tau = T/N$) для каждого временного слоя $t \in [l\tau, (l+1)\tau]$, $l = 0, \dots, N-1$, решают начально-краевую задачу относительно функций

$$s_{l+1}(x, t), p_{l+1}(x), (s_l(x, l\tau) \equiv s^l(x), s_0(x, 0) = s^0(x) = s^0(x, 0)) :$$

$$\begin{aligned} L_3 s_{l+1} \equiv -m \frac{\partial s_{l+1}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{K}(x, s^l) \nabla s_{l+1}) + \vec{B}(x, s^l) \nabla s_{l+1} + \\ + D(x, s^l) \nabla p_{l+1} \nabla s_{l+1} = 0, (x, t) \in Q, \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$s_{l+1}(x, t) = s_0(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (5.91)$$

$$s_{l+1}(x, l\tau) = s^l, \quad x \in \Omega, \quad (5.92)$$

$$L_4 p_{l+1} \equiv \operatorname{div}(K(x, s^l) \nabla p_{l+1} + \vec{f}(x, s^l)) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (5.93)$$

$$p_{l+1}(x) = p_0(x, l\tau), \quad x \in \partial\Omega. \quad (5.94)$$

5.3.1 Применение методов Монте–Карло

Опишем общую схему применения алгоритмов Монте–Карло для реализации Методов 5.1 – 5.2

Для Метода 5.1 сначала решается задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения (5.88)-(5.89) относительно $p_{l+1}(x, t)$ при заданном значении насыщенности s_i и фиксированном $t = t_0$, в частности $t_0 = 0$. Затем уравнение (5.85) расщепляется только по временной переменной, то есть для индекса итерации $i+1$ интервал времени $[t_0, T]$ разбивают на M частей ($\tau = (T - t_0)/M$) и для каждого временного слоя $t_i = \tau j + t_0, j = 0, \dots, M-1$, применив неявную разностную схему для (5.85), получают задачу Дирихле для уравнения эллиптического типа относительно переменной $s_{i+1}^{j+1}(x)$. Соответствующие граничные и начальные

условия (5.86) и (5.87) запишутся в виде:

$$s_{i+1}^{j+1}(x) = s_0^{j+1}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 0, M-1,$$

$$s_{i+1}^0(x, 0) = s^0(x, 0), \quad x \in \Omega$$

Теперь, опуская нижний индекс, получим задачу:

$$\begin{aligned} -m \frac{s^{j+1} - s^j}{\tau} + (\bar{K}(x, s^j) \nabla s_{j+1}) + \vec{B}(x, s^j) \nabla s_{j+1} + \\ + D(x, s^j) \nabla p_{j+1} \nabla s^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$s^{j+1}(x) = s_0^{j+1}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \quad (5.96)$$

$$s^0(x, 0) = s^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.97)$$

Для Метода 5.2, так же как в Методе 5.1, сначала решается задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения (5.93) – (5.94) относительно $p_{i+1}(x)$ при заданном значении насыщенности s^l , в частности, при $l = 0$ из (5.92) получаем $s_1(x, 0) = s^0(x)$, $x \in \Omega$. Теперь, применяя чисто неявную схему, аппроксимируя только по временной переменной, для начально-краевой задачи (5.90) – (5.92) относительно переменной $s_{l+1}(x) \equiv s^{j+1}(x)$, ($l = j$) получаем, как и в Методе 5.1, задачу Дирихле для уравнения эллиптического типа, т.е. задачу (5.95) – (5.97).

Итак, для определения p и s в обоих методах приходится решать задачу Дирихле для эллиптического типа. Опуская индексы временного слоя j для определенного давления $\tilde{p}(x)$ ($\tilde{p}(x) \equiv p^{j+1}(x)$), получаем задачу $\operatorname{div}(K(x, s) \nabla \tilde{p} + \vec{f}(x, s)) = 0$, $x \in \Omega$, $\tilde{p}(x) = p_0(x)$, $x \in \partial\Omega$ или

$$K(x, s) \Delta \tilde{p}(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x, s) \cdot \frac{\partial \tilde{p}(x)}{\partial x_i} + g(x, s) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.98)$$

$$\tilde{p}(x) = p_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.99)$$

где $C_i(x, s) = \frac{\partial}{\partial x_i} K(x, s)$, $g(x, s) = \operatorname{div} \vec{f}(x, s)$, а для определения насыщенности

$\tilde{s}(x)$ ($\tilde{s}(x) \equiv s^{j+1}(x)$) получим задачу

$$\operatorname{div}(\bar{K}(x, s) \nabla \tilde{s}(x)) + (\vec{B}(x, s) + D(x, s) \nabla \tilde{p}(x)) \nabla \tilde{s}(x) - \tilde{m} \tilde{s}(x) = -\tilde{m} s(x),$$

$x \in \Omega$,

$\tilde{s}(x) = \tilde{s}_0(x)$, $x \in \partial\Omega$, $s(x) = s^0(x)$, $x \in \Omega$ или

$$K(x, s) \Delta \tilde{s}(x) + \sum_{i=1}^n E_i(x, s) \cdot \frac{\partial s(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n B_i(x, s) \cdot \frac{\partial \tilde{s}(x)}{\partial x_i} +$$

$$+D(x, s) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{p}(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \tilde{s}(x)}{\partial x_i} - \tilde{m}(x)\tilde{s}(x) = -\tilde{m}(x)s(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.100)$$

$$\tilde{s}(x) = \tilde{s}_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.101)$$

где $s(x)$ – известная функция в силу начальных данных, $\tilde{m}(x) = \frac{m(x)}{\tau}$,

$E_i(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{K}(x, s)$, $B_i(x, s)$ компоненты вектора $\vec{B}(x, s)$.

Построение случайного процесса и алгоритма решения задач (5.98) – (5.99).

Рассмотрим для непрерывной на границе $\partial\Omega$ функции φ , измеримой f и эллиптического оператора L задачу Дирихле

$$Lu(x) = -f(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.102)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (5.103)$$

Займемся построением случайных процессов для численного нахождения решения u . Для этого в дальнейшем предположим, что область Ω и оператор L таковы, что задача (5.102) – (5.103) имеет единственное непрерывное в $\bar{\Omega}$ и регулярное в Ω решение для любых достаточно гладких f и φ . [15]. Известно, что для решения $u(x)$ краевой задачи (5.102) – (5.103) справедливо интегральное представление

$$u(x) = \int_{V(x)} k(x, y)u(y)dy + \int_{V(x)} \Lambda(y, x)f(y)dy, \quad (5.104)$$

где $k(x, y) = N_y\Lambda(y, x) \geq 0$, $\Lambda(y, x)$ – функция Леви, N_y – оператор, сопряженный к оператору L , $V(x)$ – эллипсоид,

$$V(x) = V_R(x) = \{y : \sigma(y, x) = (A^{-1}(x)(y - x), (y - x))^{1/2} \leq R(x)\}$$

где $R(x)$ – шар максимального радиуса с центром в точке x , лежащей в Ω , A – матрица старших коэффициентов оператора L , она симметричная.

Представление (5.104) называют теоремой о среднем значении. Отметим, если коэффициент $C \leq 0$ при $u(x)$ в уравнении (5.102) оператора L , то ядро $k(x, y)$ – субстохастическое, т.е. $\int_{V(x)} k(x, y)dy \leq 1$. [15].

Представление (5.104) позволяет строить несмещенные оценки для решения задачи (5.102) – (5.103). Любое регулярное решение задачи (5.102) – (5.103) удовлетворяет уравнению (5.104) и граничному условию (5.103).

В связи с этим определим оператор K , действующий на функции из $C(\bar{\Omega})$ по формуле

$$(Ku)(x) = \begin{cases} \int_{V(x)} k(x, y)u(y)dy, & x \in \Omega \\ u(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.105)$$

Рассмотрим следующую задачу: для $\varphi \in C(\partial\Omega)$ и $F \in C(\Omega)$ найти $u \in C(\bar{\Omega})$ такую, что

$$\begin{cases} u(x) = (Ku)(x) + F(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.106)$$

Если $F(x) = \int_{V(x)} \Lambda(y, x)f(y)dy$, то решение задачи (5.106) является решением задачи (5.102) – (5.103).

В работе [15] доказана теорема единственности для класса ядер $k(x, y) = N_y \Lambda(y, x)$ оператора K , действующего по формуле (5.105) и обладающего следующими свойствами:

- 1) $\text{mes}(V(x_1) \Delta V(x_2)) \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow x_2$.
- 2) $\text{diam}(V(x)) \rightarrow 0$ при $x \in \partial\Omega$.
- 3) Ядро $k(x, y)$ – субстохастическое и слабо полярное,

$$k(x, y) = W(x, y)/|x - y|^{n-1}, \quad n \geq 3,$$

где функция $W(x, y)$ может быть продолжена с $\Omega \times V(x)$ на $\Omega \times \bar{\Omega}$ непрерывным образом.

4) $\|K\|_L = 1$; тогда интегральный оператор, действующий в $L^\infty(\Omega)$ по формуле $(Ku)(x) = \int_{V(x)} k(x, y)u(y)dy$, и удовлетворяющий свойствам

1) – 3), переводит ограниченные в Ω функции в непрерывные. Легко установить, что для оператора, удовлетворяющего свойствам 1) – 3), равносильны условия:

а) для любой $u \in C(\bar{\Omega})$

$$\int_{V(x)} k(x, y)u(y)dy \rightarrow u(x_0) \text{ при } x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$$

б) $\int_{V(x)} k(x, y)dy \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$.

Из вышеизложенных утверждений следует ограниченность в $C(\bar{\Omega})$ оператора, определяемого формулой (5.105), то есть можно решать задачу (5.106) в $C(\bar{\Omega})$ и задача (5.106) имеет в $C(\bar{\Omega})$ не более одного решения.

Построение несмещенных оценок решения задачи (5.106).

Пусть $V(x)$ и ядро $k(x, y)$ удовлетворяют свойствам 1) – 3) и дополнительному требованию б). В силу последнего свойства спектральный радиус оператора K равен единице, поэтому нельзя воспользоваться стандартными оценками, применяемыми для решения интегральных уравнений второго рода методами Монте–Карло. [13]. Здесь схема построения оценок основана на теории мартингалов. В этом случае легко анализировать дисперсию оценок.

Обрывающуюся цепь Маркова определяют с переходной плотностью $P(x, y) = k(x, y)$, $y \in V(x)$. Вероятность обрыва $q(x) = 1 - \int_{V(x)} k(x, y)dy$ стремится к нулю при $x \in \partial\Omega$, поэтому траектория цепи может иметь бесконечную длину. Для множества траекторий \tilde{B} , имеющих бесконечную длину, справедлива Лемма 5.1.

Лемма 5.4 Пусть задача (5.106) разрешима для $F \equiv 0$, $\varphi \equiv 1$. Если существует функция $0 \leq H \in C(\Omega)$ такая, что задача (5.106) для $F = H$, $\varphi \equiv 0$ разрешима, то для цепи $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ с переходной плотностью $P(x, y)$ почти все траектории бесконечной длины приближаются к границе $\partial\Omega$:

$$P_x \{ \text{dist}(x_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 | \tilde{B} \} = 1, \text{ причем } P_x \{ \tilde{B} \} > 0. \quad (5.107)$$

Если в качестве $H(x)$ взять $H(x) = \int_{V(x)} \Lambda(x, y)dy$, то для решения $u(x)$ задачи (5.106) можно строить оценки на траекториях цепи $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$

с переходной плотностью

$$P(x, y) = \begin{cases} k(x, y), & y \in V(x), \\ 0, & y \notin V(x). \end{cases}$$

Последовательность оценок $\{\eta_m\}_{m=0}^\infty$ определяется равенством $\eta_m = \sum_{i=0}^{m-1} F(x_i)\chi_i + \chi_m u(x_m)$, где χ_i – индикатор события $\{\text{момент обрыва цепи} > i\}$. Очевидно, $E_x \eta_m = u(x)$, т.е. оценки η_m являются несмещенными. Последовательность $\{\eta_m\}_{m=0}^\infty$ образует мартингал относительно $\{\mathcal{F}_m\}_{m=0}^\infty$ – последовательность σ -алгебр, \mathcal{F}_m – порождена цепью до момента времени m . Последнее утверждение доказывается так же, как Лемма 5.4.

Пусть τ_1 – момент обрыва цепи, τ_2 – момент попадания цепи в δ -окрестность границы, $\tau_\delta = \min(\tau_1, \tau_2)$. Последовательность $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$ несмещенных оценок для решения $u(x)$ задачи (5.102) – (5.103) называют допустимой, если существует последовательность σ -алгебр $\{Y_m\}_{m=0}^\infty$ таких, что $\mathcal{F}_m \subset Y_m$ и $Y_m \subset Y_{m+1}$, а $\xi_m = \xi_m + \chi_m u(x_m)$, где $\xi_m Y_m$ – измерима. Для допустимой последовательности оценок $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$ определим случайную величину ξ_δ равенством

$$\xi_\delta = \xi_{\tau_\delta} + \varphi(x_{\tau_\delta}^*), \quad (5.108)$$

где через $x_{\tau_\delta}^*$ обозначена ближайшая к x_{τ_δ} точка границы. Определение корректно, так как $\tau_\delta < +\infty$ в силу вышеизложенной Леммы. Окончательно получим аналогично Теореме 5.1 [15].

Теорема 5.3 *Если допустимая последовательность оценок $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$ образует*

квадратично интегрируемый интеграл относительно семейства σ -алгебр

$\{Y_m\}_{m=0}^\infty$, то случайная величина ξ_δ является $\varepsilon(\delta)$ -смещенной оценкой

для $u(x)$, ее дисперсия есть ограниченная функция параметра δ ($\varepsilon(\delta)$ –

модуль непрерывности функции).

Теперь осталось определить для задачи (5.102) – (5.103) последовательность несмещенных оценок, которые получаются из η_m оценкой $F(x)$, по одному

случайному узлу с плотностью $\Lambda(y, x_i)/h(x_i)$, $h(x) = \int \Lambda(y, x) dy$. В этом случае последовательность несмещенных оценок $V(x)$

$$\xi_m + \sum_{i=0}^{m-1} h(x_i) f(y_i) \chi_i + \chi_m u(x_m)$$

образует мартингал относительно $\{Y_m\}_{m=0}^{\infty}$. Здесь $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, \dots$ независимые случайные векторы с плотностями $\Lambda(y, x_i)/h(x_i)$, Y_m - σ -алгебра, порожденная $x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$. Мартингал $\{\xi_m\}_{m=0}^{\infty}$ - квадратично интегрируемый.

Наконец, применяя Теорему 5.3 к мартингалу $\{\xi_m\}_{m=0}^{\infty}$ получим:

Теорема 5.4 Пусть $\varepsilon(\delta)$ - модуль непрерывности решения $u(x)$ задачи

(5.102) - (5.103); тогда оценка ξ_δ , определяемая по $\{\xi_m\}_{m=0}^{\infty}$ формулой

(5.108), является $\varepsilon(\delta)$ -смещенной для $u(x)$. $D\xi_\delta$ - ограниченная функция

параметра δ .

Для практической реализации алгоритма нужно научиться моделировать цепь $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$, на траекториях которой строятся оценки решения, и плотность $\Lambda(y, x)/h(x)$. Алгоритмы моделирования цепи Маркова основаны на методе отбора фон Неймана. Моделирование распределений требует специальных исследований, особенно в тех случаях, когда распределения должны моделироваться регулярно и многократно. Такие исследования обычно проводят для каждого конкретного уравнения, если оно решается многократно.

Замечание 5.1 Общая схема доказательств Теорем 5.3 и 5.4 и других

утверждений идентичны доказательствам аналогичных теорем и утверждений

из работы [15]. Отличия связаны со структурой эллиптических операторов,

поэтому необходимые оценки (неравенства) для доказательства Теорем

5.3 и 5.4 и других утверждений получены для эллиптических операторов

задач (5.98) – (5.99) и (5.100) – (5.101).

Трудоемким является моделирование распределений $p(x, y) = k(x, y) = N_y \Lambda(y, x)$ методом отбора Неймана, где

$$N_y \equiv a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} + c - b_k \frac{\partial}{\partial y_k};$$

в этом случае

$$N_y \equiv K(y, s) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} - C_k(y, s) \frac{\partial}{\partial y_k},$$

$\Lambda(y, x)$ – функция Леви задачи (5.98) – (5.99);

$$N_y \equiv K(y, s) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} - \tilde{m}(y) + R_k \frac{\partial}{\partial y_k},$$

где

$$R_k(y, s) = E_k(y, s) + B_k(y, s) + D(y, s) \frac{\partial \tilde{p}(y)}{\partial y_k},$$

$\Lambda(y, x)$ – функция Леви задачи (5.100) – (5.101).

5.4 Модель релаксационной фильтрации

Следуя книге [10], опишем основные принципы и уравнения релаксационной фильтрации.

Для описания изотермических нестационарных фильтрационных течений однородной капельно–сжимаемой жидкости в изотропной слабдеформируемой пористой среде используются различные модели фильтрации, из которых наиболее широкое распространение получила модель классического упругого режима:

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \quad (5.109)$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta(p - p_0), \quad (5.110)$$

$$\rho_0 \text{div } \vec{w} + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0, \quad (5.111)$$

здесь p – давление, \vec{w} – скорость фильтрации, k и β – соответственно коэффициенты проницаемости и упругости, μ – вязкость жидкости, m –

пористость, ρ – плотность жидкости, p_0, ρ_0, m_0 – соответственно давление, плотность жидкости и пористость в невозмущенных пластовых условиях. В основе этой модели лежат предположения, во-первых, о бесконечно большой скорости распространения возмущений и, во-вторых, о мгновенном соответствии между скоростью фильтрации и градиентом давления (5.109), количеством жидкости в единице объема пласта и давлением (5.110). Однако многочисленные промысловые и лабораторные исследования показывают, что отмеченные предположения могут быть приняты лишь тогда, когда граничные или иные условия, определяющие движение жидкости, медленно меняются во времени. Таким образом, можно считать, что модель классического упругого режима описывает нестационарную "равновесную" фильтрацию.

Несоблюдение указанных "равновесных" условий может привести к неудовлетворительному гидродинамическому описанию фильтрации. Это находит свое подтверждение в отклонении для малых значений времени давления или обратного дебита от прямолинейной временной зависимости, обработанной согласно модели классического упругого режима в полулогарифмических координатах, когда на практике для определения параметров пластов резко меняют режим работы скважины и снимают кривую восстановления давления (КВД) или кривую падения дебита (КПД). Кроме этого, наблюдается частотная зависимость коэффициента пьезопроводности $\chi = \frac{k}{\mu\beta}$ при исследовании одного и того же участка с помощью периодических возмущений на различных частотах, и она тем заметнее, чем выше частота периодических возмущений.

Отмеченные выше особенности быстрых фильтрационных процессов можно объяснить их "неравновесностью" обязанной обменным перетоком жидкости в трещиновато-пористых и слоистых средах; межфазному обмену при фильтрации неоднородных дисперсных сред различной природы (эмульсий, газированных жидкостей, растворов полимеров); упруговязким свойством (реологии) жидкости и насыщенного порового коллектора.

В теории фильтрации жидкостей в трещиновато-пористых средах основополагающей является теория Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова, И.Н. Кочиной. [10]. Эта теория базируется на предположении о том, что скорость перетока жидкости между блоками и трещинами прямо пропорциональна разности давлений в блоках и трещинах. Отмеченная теория позволила установить механизм "неравновесной" фильтрации и получить линейное релаксационное дифференциальное уравнение в частных

производных поля давления в блоках и трещинах.

В последнее время бурно развивается "реологическое" направление исследований неравновесной фильтрации – релаксационной фильтрации, учитывающей как неравновесный характер закона фильтрации, так и релаксационное поведение пористости после резкого изменения давления. Для учета неравновесного соответствия скорости фильтрации и градиента давления предлагается использовать аналог кельвино–максвелловой жидкости

$$\vec{w} + \tau_w \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \cdot \text{grad}(p + \tau_p \cdot \frac{\partial p}{\partial t}), \quad (5.112)$$

где τ и τ_p – некоторые положительные постоянные равномерности времени. В работе [10] для учета релаксационного характера поведения пористости предложена следующая зависимость

$$m - m_0 + \lambda_m \cdot \frac{\partial(m - m_0)}{\partial t} = \beta_c \left(p - p_0 + \lambda_p \cdot \frac{\partial(p - p_0)}{\partial t} \right), \quad (5.113)$$

где λ_m и λ_p – время релаксации соответственно пористости при постоянном перепаде давления и давления при постоянной пористости, β_c – коэффициент сжимаемости пористой среды. Такое поведение пористости будет определять и релаксационный характер изменения во времени количества жидкости в элементе объема. Тогда для капельно–сжимаемой жидкости плотность связана с давлением равновесным соотношением

$$\rho = \rho_0(1 + \beta_f(p - p_0)), \quad (5.114)$$

где β_f – коэффициент сжимаемости жидкости, можно записать

$$m\rho = m_0\rho_0 + \rho_0 \left(\beta_* (p - p_0) + \frac{\lambda_m - \lambda_p}{\lambda_m} \cdot \beta_c \right) \times \int_0^t (p - p_0)(\vec{x}, t) \exp \left(-\frac{t - \tau}{\lambda_m} \right) \frac{d\tau}{\lambda_m} \quad (5.115)$$

где $\beta_* = m_0\beta_f + \beta_c\lambda_p/\lambda_m$ – динамический коэффициент упругости пласта. В некоторых работах предложены модели релаксационно–сжимаемых сред, в основе которых лежит соотношение

$$m + (\tau_m - \tau_n) \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \tau_m \cdot \tau_n \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} = m_0 + \beta_c \cdot \left\{ (p - p_0) + (\tau_d + \tau_\sigma) \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \tau_d \cdot \tau_\sigma \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right\} \quad (5.116)$$

где $\tau_m, \tau_n, \tau_d, \tau_\sigma$ - некоторые времена релаксации.

Для учета объемной ползучести горных пород, по аналогии с методами теории ползучести, предлагают обобщение закона (5.116)

$$m = m_0 \cdot \left(1 + \int_0^t F(t - \tau)(p - p_0)(\vec{x}, t) d\tau \right), \quad (5.117)$$

где $F(t)$ - ядра ползучести, являющиеся характеристиками горной породы.

Большое внимание уделялось моделям фильтрационного течения жидкости с учетом сил инерции, в основу которых полагался следующий закон фильтрации

$$\vec{w} = \tau_w \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \cdot \text{grad } p \quad (5.118)$$

Из приведенного обзора видно, что для описания неравновесных процессов фильтрации было предложено много различных линейных моделей, обладающих тем общим свойством, что при фильтрации в условиях близких к равновесным, они практически совпадают с моделью классического упругого режима (5.109) - (5.111). Поэтому целесообразно рассматривать эти модели как элементы из класса линейных наследственных моделей фильтрации, являющихся естественным обобщением модели (5.109) - (5.111) на случай неравновесных эффектов

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu} \cdot \text{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} D_t p(\vec{x}, t) A(t - \tau) d\tau, \quad (5.119)$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta \int_{-\infty}^{+\infty} D_t(p - p_0)(\vec{x}, t) B(t - \tau) d\tau, \quad (5.120)$$

$$\rho_0 \cdot \text{div } \vec{w} + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0; \quad (5.121)$$

здесь оператор D_t - обобщенная производная по времени, \vec{x} - вектор рассматриваемой точки пласта, $A(t)$ и $B(t)$ - некоторые обобщенные функции времени, характеризующие условия затухания памяти

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) \rightarrow 1, \quad B(t) \rightarrow 1 \text{ при } t \rightarrow \infty \\ A(t) = 0, \quad B(t) = 0 \text{ при } t < 0. \end{array} \right. \quad (5.122)$$

Несмотря на большое количество исследований конкретных моделей неравновесной фильтрации, до сих пор не выяснены общие гидродинамические особенности фильтрации, описываемой системой (5.119) – (5.121). В частности, не решена проблема конкретности постановок краевых задач при произвольных функциях $A(t)$ и $B(t)$, не изучены условия существования поверхностей разрыва давления, скорости фильтрации и другие вопросы.

Уравнения сохранения импульса сил сопротивления и массы жидкости.

Рассмотрим неустановившуюся изотермическую фильтрацию капельно – сжимаемой вязкой жидкости в неподвижной изотропной и слабдеформируемой пористой среде. Если трактовать законы фильтрации как следствие закона сохранения количества движения идеальной жидкости и для практических целей ограничиться рассмотрением "ползущих" течений, для которых вклад сил инерции жидкости в отмеченном законе сохранения пренебрежимо мал по сравнению с другими силами, тогда закон сохранения количества движения жидкости сводится к статическому равновесию сил пластового давления, с одной стороны, и сил тяжести и сопротивления – с другой, то есть можно записать для слабосжимаемой жидкости ($\rho \cong \rho_0$) и пористой среды ($m \cong m_0$)

$$\int_V (\vec{D} + \rho_0 \cdot \vec{g}) dV - \int_S p_n \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (5.123)$$

где силы трения между жидкостью и твердыми частицами пористой среды трактуются как массовые силы сопротивления – \vec{D} , зависящие от скорости фильтрации; ρ_0 и m_0) – плотность жидкости и пористость в невозмущенных пластовых условиях, \vec{g} – вектор сил тяжести, p_n – пластовое давление, V – произвольный фиксированный в пространстве объем, S – поверхность, его ограничивающая, \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности S .

Очевидно, что

$$\vec{g} = -\text{grad}(gz) \quad (5.124)$$

где z – ось координат, направленная вертикально вверх, g – ускорение свободного падения. С помощью формулы (5.124) можно представить соотношение (5.123) в виде

$$\int_V \vec{D} \cdot dV - \int_S p_n \cdot \vec{n} \cdot dS = 0, \quad (5.125)$$

где величина

$$p = p_0 + \rho_0 g \cdot z \quad (5.126)$$

p_0 – приведенное пластовое давление.

Введем плотность импульса сил сопротивления \vec{J}

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{J} dV = \int_V \vec{D} dV \quad (5.127)$$

Тогда соотношение (5.125) принимает смысл закона сохранения импульса сил сопротивления

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{J} dV - \int_S p \vec{n} dS = 0 \quad (5.128)$$

Рассмотрим теперь закон сохранения массы жидкости, записанный в интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_V m \rho dV + \int_S \rho w_n dS = 0 \quad (5.129)$$

где w_n – проекция скорости фильтрации на нормаль \vec{n} .

Линеаризуя закон сохранения (5.129), получаем соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_V m \rho dV + \rho_0 \int_S w_n dS = 0 \quad (5.130)$$

Далее будем различать случай, когда величины, входящие в соотношения (5.127), (5.128), (5.129), (5.130), непрерывны по координатам, и случай, когда эти величины имеют разрыв на некоторой поверхности; в обоих случаях неявно предполагается кусочная дифференцируемость отмеченных величин. В первом случае с помощью теоремы Остроградского – Гаусса можно получить следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{d\vec{J}}{dt} = \text{grad } p, \\ \frac{d(m\rho)}{dt} + \text{div}(\rho\vec{w}) &= 0, \\ \frac{d(m\rho)}{dt} + \rho_0 \text{div } \vec{w} &= 0. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Во втором случае исходными уравнениями будут соотношения (5.127), (5.128), (5.129), (5.130), записанные в интегральной форме. В этом смысле они являются более общими, нежели дифференциальные уравнения (5.131), описывающие поля только в области их непрерывности.

Отметим, что системы уравнений (5.128), (5.129) являются незамкнутыми относительно величин m , ρ , p , \vec{w} , \vec{J} . Для замыкания этих уравнений необходимо ввести три определяющих соотношения, учитывающих свойства жидкостей и пород, из которых слагается пористый скелет, то есть выразить плотность импульса сил \vec{J} через скорость фильтрации.

Основные соотношения для импульса сил сопротивления и массы жидкости. Основные принципы линейной релаксационной фильтрации.

Импульсы сил \vec{J} в некоторой фиксированной точке обязаны своим возникновением действию вязких сил при взаимодействии движущейся жидкости с неподвижным пористым скелетом и зависит, таким образом от скорости фильтрации в этой точке. Простейшую зависимость между величинами \vec{J} и \vec{w} можно представить в виде

$$\vec{D} = \frac{d\vec{J}}{dt} = -c \cdot (|\vec{w}|)\vec{w}. \quad (5.132)$$

Использование этой зависимости приводит в силу первого уравнения (5.131) к известному нелинейному закону фильтрации вида

$$\text{grad } p = -c \cdot (|\vec{w}|)\vec{w}, \quad (5.133)$$

который при постоянном $c \cdot (|\vec{w}|) = \frac{\mu}{k}$ переходит в широко распространенный закон Дарси.

Соотношение (5.132) является ограниченным. Ограниченность его следует из того факта, что оно основано на гипотезе о мгновенном установлении "равновесного" соответствия между величинами \vec{D} и \vec{w} . Использование отмеченной гипотезы целесообразно при изучении стационарных, а также "медленных" нестационарных фильтрационных течений. Для "быстрых" нестационарных процессов фильтрации характерно запаздывание одной из величин \vec{D} или \vec{w} по отношению к другой. Это запаздывание может быть объяснено проявлением релаксационных эффектов различной природы. Простейшему "неравновесному" закону фильтрации (5.112), записанному в эквивалентной

форме

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\tau_p}{\tau_w} \cdot \nabla p + \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\tau_p - \tau_w}{\tau_w} \cdot \int_{-\infty}^t \nabla p(\vec{x}, \tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_w}\right) \frac{d\tau}{\tau_w} \quad (5.134)$$

соответствует следующее определяющее соотношение

$$\vec{w} = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\tau_p}{\tau_w} \cdot \vec{D} + \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\tau_p - \tau_w}{\tau_w} \cdot \int_{-\infty}^t \vec{D}(\vec{x}, \tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_w}\right) \frac{d\tau}{\tau_w}.$$

Здесь τ_p и τ_w – неотрицательные постоянные времена релаксации соответственно давления и скорости фильтрации.

Приведем основные принципы механики сплошной среды.

Принцип детерминизма – ПД. Величина импульса сил сопротивления \vec{J} в некоторой фиксированной точке пласта определяется всей предысторией движения вплоть до момента t . Это означает, что \vec{J} в данный момент времени зависит лишь от прошлых и настоящих перемещений и не зависит от будущих.

Принцип локального действия – ПЛД. Величина \vec{J} в данной точке однозначно определяется историей движения в произвольно малой окрестности этой точки. Таким образом, ПЛД исключает влияние на величину \vec{J} истории движения частиц, лежащих вдали от точки измерения \vec{J} .

Отметим, что этот принцип может означать, по существу, отказ от переноса субстанцией (конвекции) истории движения ввиду его малости.

Принцип суперпозиции – ПС. Результирующее перемещение жидкости $\vec{w} = \sum_i \vec{w}_i$ вызывает импульс сил сопротивления, равный сумме импульсов этих сил, вызванных слагающими перемещениями, то есть $\vec{J}(\vec{w}) = \sum_i \vec{J}(\vec{w}_i)$.

Сформулированный выше принцип является аналогом принципа суперпозиции Больцмана для вязкоупругих материалов и принципа суперпозиции Гобкинсона для электрических цепей.

Принцип затухающей памяти – ПЗП. Уменьшение темпа изменения скорости фильтрации до нуля обуславливает асимптотическое стремление зависимости \vec{J} от \vec{w} к "равновесному" закону Дарси

$$\text{grad } p = \vec{D} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \sim -\frac{\mu}{k} \cdot \vec{w} \quad (5.135)$$

практически этот принцип устанавливает существование некоторого характерного времени релаксации τ_1 ; если T – время существенного изменения скорости фильтрации много больше τ_1 , то релаксацией можно пренебречь. Иначе говоря, при $\frac{T}{\tau_1} \rightarrow \infty$ должно выполняться асимптотическое равенство (5.135). Очевидно, что для самого закона Дарси $\tau_1 = 0$.

Дадим теперь математическую формулировку вышеуказанных принципов.

Пусть в момент времени $t = t_0$ жидкость подвергалась перемещению со скоростью фильтрации Δw_i (w_i – компонента вектора скорости фильтрации в направлении i -ой координатной оси). В результате этого перемещения появляется сила сопротивления, импульс которой можно представить в виде

$$J_i = -F(t - t_0)\Delta w_i(t_0), \quad t \geq t_0, \quad (5.136)$$

где $F(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ и в силу ПД $F(t) = 0$ при $t < 0$. Итак, формула (5.136) определяет импульс сил сопротивления в момент времени $t \geq t_0$ после приложения скорости фильтрации $\Delta w_i(t_0)$ в момент (t_0) . Эта формула показывает, что величина J_i зависит лишь от разности $t - t_0$ и не зависит явно от момента t_0 ; отмеченное свойство является следствием предположения о неизменности характеристик системы во времени.

Если жидкость подвергается перемещениям со скоростями фильтрации $\Delta w_i(t_n)$ последовательно в моменты времени t_n , то, согласно ПС, результирующий импульс сил сопротивления в момент времени t будет определяться соотношением

$$J_i(t) = - \sum_n F(t - t_n)\Delta w_i(t_n). \quad (5.137)$$

Очевидно, в случае произвольного перемещения с непрерывной скоростью $w_i(t)$; i -я компонента импульса сил сопротивления представима интегральной формулой вида

$$J_i(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t')dw_i(t') = - \int_{-\infty}^t F(t - t')dw_i(t') \quad (5.138)$$

Следует отметить, что в силу ПЛД определяющие соотношения записываются для фиксированной в пласте точке; это позволяет в настоящем параграфе опустить в отмеченных соотношениях пространственные координаты, а частные производные по времени обозначать как обыкновенные.

Нижний предел интегрирования в формуле (5.138) указывает на то, что импульс сил сопротивления в момент времени t определяется всей предысторией перемещений со скоростью фильтрации $w_i(t')$. Если в момент времени $t' = \tau$ скорость фильтрации скачкообразно меняется на величину $[w_i]_\tau$, то полный импульс сил сопротивления очевидно будет равен

$$J_i(t) = -[w_i]_\tau F(t - \tau) - \int_{-\infty}^t F(t - t') \frac{dw_i(t')}{dt'} dt'. \quad (5.139)$$

Следовательно, при произвольном перемещении жидкости со скоростью фильтрации $\vec{w}(t')$, скачкообразно меняющейся в момент времени $t' = \tau$ на величину $[\vec{w}]_\tau$, интегральная формула результирующего импульса сил сопротивления для изотропных сред запишется так

$$\begin{aligned} J_i(t) &= -F(t - \tau)[\vec{w}]_\tau - \int_{-\infty}^t F(t - t') \frac{d\vec{w}}{dt'} dt' = \\ &= -F(0)\vec{w}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{dF(t - t')}{d(t - t')} \vec{w}(t') dt' = \\ &= -F(0)\vec{w}(t) - \int_0^\infty \frac{dF(t')}{dt'} \vec{w}(t - t') dt', \end{aligned} \quad (5.140)$$

где $F(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} F(t)$.

Последняя формула показывает, что при $F(0) \neq 0$ скачок скорости фильтрации приводит к скачку импульса сил сопротивления в момент $t = \tau$

$$[\vec{J}]_\tau = -F(0)[\vec{w}]_\tau \quad (5.141)$$

Продифференцируем (5.140) по времени t

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = -\frac{dF(t - \tau)}{d(t - \tau)} [\vec{w}]_\tau - F(0) \frac{d\vec{w}}{dt}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{dF(t - t')}{d(t - t')} \frac{d\vec{w}}{dt}(t') dt'. \quad (5.142)$$

Для скачка временной производной от \vec{J} можно записать при $t = \tau$

$$\left[\frac{d\vec{J}}{dt} \right]_\tau = -\frac{dF}{dt}(0) [\vec{w}]_\tau - F(0) \left[\frac{d\vec{w}}{dt} \right], \quad (5.143)$$

где

$$\frac{dF}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{dF(t)}{dt}$$

используя определение обобщенной производной по времени, соотношению (5.140) можно придать более компактный и общий вид

$$\vec{J}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t') D_t(\vec{w}(t')) dt, \quad (5.144)$$

где в рассматриваемом случае однократного разрыва функции $\vec{w}(t')$

$$D_t(\vec{w}(t')) = \frac{d\vec{w}(t')}{dt'} + [\vec{w}]_{\tau} \delta(t' - \tau); \quad (5.145)$$

где $\delta = \delta(t)$ – функция Дирака. И в дальнейшем оператор D_t будет обозначать обобщенные производные от функции по времени; количество индексов t соответствует порядку производной.

С математической точки зрения правую часть формулы (5.144) удобно рассматривать как свертку обобщенных функций времени $F(t)$ и $D_t \vec{w}(t)$ из подходящих пространств. Это позволяет использовать хорошо известные свойства свертки и формализм сверточной алгебры. Прибегнув к символике сверточной алгебры, формулу (5.144) можно кратко записать так:

$$\vec{J} = -F * D_t \vec{w} = -D_t F * \vec{w} \quad (5.146)$$

где $*$ – означает операцию свертки. Таким образом, соотношение (5.146) является искомым определяющим соотношением.

Нетрудно убедиться в том, что закону Дарси соответствует функция

$$F(t) = \frac{\mu}{k} t \cdot \eta(t), \quad (5.147)$$

где $\eta(t)$ – Функция Хейвисада. В самом деле, подставляя в формулу (5.146) функцию (5.147), получим

$$\vec{J} = -F * \vec{w} = -\frac{\mu}{k} \{D_t(t \cdot \eta(t))\} * \vec{w} = -\frac{\mu}{k} * \vec{w} = -\frac{\mu}{k} \int_{-\infty}^t \vec{w}(t') dt'. \quad (5.148)$$

Остается теперь продифференцировать выражение (5.148) по времени и вспомнить связь для закона Дарси

$$\text{grad } p = \vec{D} = \frac{d\vec{J}}{dt} = -\frac{\mu}{k} \vec{w}. \quad (5.149)$$

Отметим, что ПЗП накладывает на функцию $F(t)$ следующие ограничения при $\frac{t}{\tau_1} \rightarrow \infty$

$$F(t) \sim \frac{\mu}{k} t \cdot \eta(t), \quad (5.150)$$

где τ_1 полностью определяется самой функцией $F(t)$.

Перейдем теперь к введению определяющего соотношения для величины $m \cdot \rho$.

Как отмечалось выше, порода и жидкость слабосжимаемы, то есть зависимость m и ρ от давления с высокой степенью точности может быть описана линейными соотношениями вида

$$m = m_0 + \beta_c(p - p_0), \quad (5.151)$$

$$\rho = \rho_0(1 + \beta_f(p - p_0)),$$

где каждая из β_c, β_f имеет порядок около 10^{-5} 1/ат. Очевидно, определяющее соотношение для величины $m \cdot \rho$ с хорошей точностью можно записать в виде

$$m\rho = m_0\rho_0 + \rho_0\beta(p - p_0), \quad (5.152)$$

где $\beta = \beta_c + m_0\beta_f$ – коэффициент упругости пласта. Последняя зависимость широко используется в теории "равновесной" нестационарной фильтрации.

Заметим, что соотношение (5.152) обладает недостатком, так как оно базируется на гипотезе о мгновенном установлении "равновесного" соответствия между величинами $m \cdot \rho$ и p . Практика пьезометрии пластов указывает на то, что отмеченная выше гипотеза часто нарушается в виду того, что соотношение (5.152) не реализуется. В этом случае для описания фильтрации в релаксационно–сжимаемых средах можно воспользоваться определяющим соотношением вида

$$m\rho = m_0\rho_0 + \rho_0 \left\{ \beta_*(p - p_0) + \frac{\lambda_m - \lambda_p}{\lambda_m} \int_0^t (p - p_0)(\vec{x}, t') \exp\left(-\frac{t - t'}{\lambda_m}\right) \frac{dt'}{\lambda_m} \right\}. \quad (5.153)$$

Обобщая соотношение (5.153) аналогично тому, как это было сделано при

выводе зависимости (5.146), получим определяющее соотношение вида

$$\begin{aligned} m\rho - m_0\rho_0 &= \Phi(0)(p - p_0) + \int_0^\infty \frac{d\Phi(t')}{dt'}(p - p_0)(t - t')dt' = \\ &= \Phi_* D_t(p - p_0) = D_t(p - p_0), \end{aligned} \quad (5.154)$$

где $\Phi = \Phi(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

Из соотношения (5.154), аналогично формулам (5.141), (5.143) получим

$$[m \cdot \rho]_\tau = \Phi(0) \cdot [p]_\tau, \quad (5.155)$$

$$\left[\frac{d(m\rho)}{dt} \right]_\tau = \frac{d\Phi}{dt}(0)[p]_\tau + \Phi(0) \left[\frac{dp}{dt} \right]_\tau. \quad (5.156)$$

Нетрудно показать, что соотношению (5.152) соответствует функция

$$\Phi(t) = \rho_0 \beta \eta(t). \quad (5.157)$$

Действительно, подставляя (5.157) в формулу (5.154), найдем

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0 \beta \cdot D_t \eta * (p - p_0) = \rho_0 \beta \delta * (p - p_0) = \rho_0 \beta (p - p_0). \quad (5.158)$$

Отметим, что при стремлении скорости изменения давления к нулю зависимость (5.154) в силу ПЗП асимптотически стремится к "равновесной" связи (5.152). В этом случае ПЗП устанавливает существование некоторого характерного времени релаксации τ_2 ; если T – время существенного изменения давления – много больше τ_2 , то релаксацией можно пренебречь. Заметим, что ПЗП накладывает следующее ограничение на функцию $\Phi(t)$ при $\frac{t}{\tau_2} \rightarrow \infty$:

$$\Phi(t) \sim \rho_0 \beta \eta(t). \quad (5.159)$$

Система уравнений линейной релаксационной фильтрации.

Итак, линейная релаксационная фильтрация будет описываться *законом сохранения импульса, линеаризованным законом сохранения массы жидкости*, а также определяющими соотношениями для импульса сил сопротивления и массы жидкости, то есть системой уравнений

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{J} dV - \int_S p \vec{n} dS = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_V m\rho dV + \rho_0 \int_S w_n dS = 0,$$

$$\vec{J} = -F(0)\vec{w}(\vec{x}, t) - \int_0^\infty \frac{d\Phi(t')}{dt'} \vec{w}(\vec{x}, t - t') dt', \quad (5.160)$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \Phi(0)(p - p_0) + \int_0^\infty \frac{d\Phi(t')}{dt'} (p - p_0)(\vec{x}, t - t') dt'.$$

Очевидно, что эта система уравнений – замкнута. В подземной гидромеханике принято рассматривать только давление и скорость фильтрации, поэтому удобнее исключить из системы (5.160) величины \vec{J} и $m\rho$. Нетрудно убедиться в том, что после такого исключения получим следующую замкнутую относительно величин p и \vec{w} систему уравнений, описывающую релаксационную фильтрацию в области непрерывности полей давления и скорости фильтрации

$$\nabla^2 p = \frac{F(0)\Phi(0)}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \int_0^\infty \left(\frac{F(0)}{\rho_0} \frac{d\Phi(t')}{dt'} + \frac{\Phi(0)}{\rho_0} \frac{dF(t')}{dt'} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho} \int_0^{t'} \frac{dF(\tau)}{d\tau} \frac{d\Phi(t' - \tau)}{d(t' - \tau)} \right) \frac{\partial^2 p(\vec{x}, t - t')}{\partial(t - t')^2} dt' \quad (5.161)$$

$$\text{grad } p = -F(0) \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \int_0^\infty \frac{dF(t')}{dt'} \frac{\partial \vec{w}(\vec{x}, t - t')}{\partial(t - t')} dt'.$$

Отметим, что любая линейная релаксационная модель фильтрации полностью характеризуется двумя функциями времени $F(t)$ и $\Phi(t)$, называемыми в дальнейшем ядрами релаксации закона фильтрации и массы жидкости соответственно.

В качестве иллюстрации приведем некоторые простейшие функции $F(t)$ и $\Phi(t)$ и соответствующие им модели фильтрации

Модель классического упругого режима фильтрации.

Как отмечалось выше, в основе классического упругого режима фильтрации лежит закон Дарси (5.135) и линейная связь между изменением количества жидкости в элементарном объеме и давлением в нем (5.151). Этим двум

соотношениям соответствуют ядра релаксации вида

$$F(t) = \frac{\mu}{k} t \eta(t), \quad \Phi(t) = \rho_0 \beta \eta(t). \quad (5.162)$$

В данном случае система (5.161) принимает форму

$$\begin{cases} \chi \cdot \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t} \\ -\frac{k}{\mu} \text{grad } p = \vec{w}. \end{cases} \quad (5.163)$$

Простейшая модель фильтрации с постоянной скоростью распространения возмущений.

Эта модель определяется следующими ядрами релаксации

$$F(t) = \frac{\mu}{k} (t + \tau) \eta(t), \quad \Phi(t) = \rho_0 \beta \eta(t). \quad (5.164)$$

Система (5.161) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \chi \cdot \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ -\frac{k}{\mu} \text{grad } p = \vec{w} + \tau \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}. \end{cases} \quad (5.165)$$

Первое уравнение в (5.165) есть телеграфное уравнение. Известно, что оно описывает распространение возмущений с учетом поверхности разрыва гидродинамических параметров течения, несущего возмущение в область покоя с постоянной скоростью, равной

$$v_0 = \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}. \quad (5.166)$$

Поверхности разрыва основных гидродинамических параметров и их скачки.

Важной особенностью релаксационной фильтрации является возможность существования в области течения подвижных поверхностей, на которых терпят разрыв основные гидродинамические параметры (давление, скорость фильтрации и др.) и их производные. Типична для гидромеханики ситуация, когда в первоначально невозмущенном пласте в момент времени $t = 0$ на некоторой поверхности внутри пласта или на его границе мгновенно

(скачкообразно) возникло возмущение по давлению или по скорости фильтрации. Поверхность, несущая это возмущение, разбивает пласт на возмущенную и невозмущенную области; очевидно при переходе через эту поверхность давление, плотность жидкости, пористость, скорость фильтрации, вообще говоря, терпят разрыв. В частности, возникновение поверхности разрыва первого рода имеется в виду всякий раз, когда при постановке краевых задач релаксационной фильтрации граничное условие рассогласуется с начальным. Если возникшая таким образом поверхность разрыва продолжает существовать и двигаться в пласте с конечной скоростью, то можно говорить о конечной скорости распространения возмущений.

Представляет интерес нахождение условия сохранения импульса сил сопротивления и массы жидкости на поверхности разрыва, а также выявление условия существования таких поверхностей. Эти вопросы всесторонне изучены в монографии [10]. Мы здесь покажем, опять-таки ссылаясь на работу [10], скачки давления и скорости фильтрации для вышеизложенных двух моделей.

Модель классического упругого режима. Для этой модели в силу (5.162) имеем

$$F(0) = 0, \quad \Phi(0) = \rho_0 \beta. \quad (5.167)$$

Тогда согласно формуле ([10], стр 30, первая формула (1.4.23))

$$v^2 = \frac{\rho_0}{\Phi(0)F(0)} = const = v_0^2$$

скорость распространения возмущений бесконечна, а из формулы ([10], стр 30, вторая формула (1.4.23))

$$[\vec{w}_{n_0}]^2 = \frac{\Phi(0)}{\rho_0 F(0)} [p]^2$$

следует, что мгновенный конечный перепад давления на некоторой поверхности приводит на ней в момент возникновения такого перепада в бесконечной скорости фильтрации и мгновенный конечный скачок скорости фильтрации на некоторой поверхности приводит на ней к нулевому перепаду давления. Для простейшей модели фильтрации, учитывающей постоянную скорость распространения возмущений, из формул (5.164) следует, что

$$F(0) = \frac{\mu}{k} \tau, \quad \Phi(0) = \rho_0 \beta. \quad (5.168)$$

Тогда из формулы ([10], стр 30, первая формула (1.4.23)) определяется скорость распространения возмущений

$$v_0 = \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}.$$

а вторая формула ([10], стр 30, вторая формула (1.4.23)) показывает, что на фронте возмущения скачки давления и скорость фильтрации связаны соотношением

$$[w_{n_0}] = [p]\rho_0 v_0 = [p]\beta \sqrt{\frac{\chi}{\tau}} = \frac{k}{\mu} \frac{[p]}{\sqrt{\chi \cdot \tau}}, \quad (5.169)$$

включает и момент времени возникновения на поверхности возмущения одного из скачков. Поскольку в этом случае

$$\left. \frac{d \ln(F(t)\Phi(t))}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\tau}, \quad (5.170)$$

то скачки давления и скорости фильтрации затухают в случае одномерных фильтрационных течений по законам

$$\begin{cases} [p] = [p]_0 \cdot \left(\frac{x_0}{x_0 + v_0 t} \right)^{\alpha/2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right), \\ [w] = [w]_0 \cdot \left(\frac{x_0}{x_0 + v_0 t} \right)^{\alpha/2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right). \end{cases} \quad (5.171)$$

5.4.1 Постановка начально–краевой задачи

Рассмотрим задачу прямолинейно-параллельной фильтрации. Пусть первоначально невозмущенный ($p(x, 0) = p_0 = 0$) полубесконечный $0 \leq x < \infty$ пласт заполнен капельно–сжимаемой жидкостью. На левом конце пласта в начальный момент времени ($t = 0$) начинает работать галерея с постоянным забойным давлением ($\tilde{p}_0 = const$). Пласт на бесконечности остается невозмущенным ($p(\infty, t) = 0$). Для обеих моделей (1. Модель классического упругого режима фильтрации. 2. Модель фильтрации с постоянной скоростью распространения возмущений.) в этом одномерном случае математически начально–краевую задачу можно поставить так:

1. Модель классического упругого режима фильтрации:
найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (5.172)$$

удовлетворяющее следующим начальным данным

$$p(x, 0) = 0 \quad (5.173)$$

и граничным условиям

$$p(0, t) = \tilde{p}_0, \quad p(\infty, t) = 0. \quad (5.174)$$

Фильтрация осуществляется по линейному закону Дарси в упругой пористой среде. Требуется определить давление в пласте.

2. Модель фильтрации с постоянной скоростью распространения возмущений: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения

$$\tau \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (5.175)$$

удовлетворяющее следующим начальным данным

$$p(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial p(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (5.176)$$

и граничным условиям

$$p(0, t) = \tilde{p}_0, \quad p(\infty, t) = 0. \quad (5.177)$$

Фильтрация жидкости в условиях этой модели характеризуется ядрами

$$F(t) = \frac{\mu}{k}(t + \tau)\eta(t), \quad \Phi(t) = \rho_0\beta\eta(t).$$

Ввиду того, что $F(0) = \frac{\mu}{k}\tau$, а $\Phi(0) = \rho_0\beta$, то $v_0 = \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}$. Таким образом, вся рассматриваемая область разбивается на область фильтрации (за фронтом возмущения) и невозмущенную область (перед фронтом возмущения). В области фильтрации давление удовлетворяет телеграфному уравнению (5.175), вне области фильтрации давление равно первоначальному пластовому. На фронте возмущения имеет место следующая связь между скачками давления и скорости фильтрации

$$[w] = \frac{\mu}{k} \cdot \frac{[p]}{\sqrt{x/\tau}} = \beta \cdot \sqrt{\frac{\chi}{\tau}} [p]. \quad (5.178)$$

При этом положение фронта возмущений находятся по формуле $\xi(t) = v_0 t$, а поведение скачков давления и скорости фильтрации на нем описывается соответственно соотношениями

$$\begin{cases} [p]_t = [p]_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right), \\ [w]_t = [w]_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right). \end{cases} \quad (5.179)$$

В этой задаче, во-первых, корректно допускать рассогласование граничных условий с начальными данными, во-вторых, в начальный момент времени скачки давления и скорости фильтрации удовлетворяют соотношению (5.178).

Теперь обобщим данные задачи на трехмерный случай.

Пусть первоначально невозмущенный пласт $\Omega \in R^3$, с границей $\partial\Omega$, заполнен капельно-сжимаемой жидкостью. Пусть на границе $\partial\Omega$ области Ω давление $p(\vec{x}, t)$ известно. Рассмотрим модель классического упругого режима фильтрации. В этом случае фильтрация осуществляется по линейному закону Дарси в упругой пористой среде. И задача ставится: требуется найти давление $p(\vec{x}, t)$ и скорость фильтрации $\vec{w}(\vec{x}, t)$ в пласте $\Omega \in R^3$ с границей $\partial\Omega$, удовлетворяющим начально-краевым условиям

$$\frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial t} = \chi \cdot \nabla^2 p(\vec{x}, t) \text{ в } Q = \Omega \times (0, T), \quad (5.180)$$

$$p(\vec{x}, 0) = p_0(\vec{x}) \text{ в } \Omega \quad (5.181)$$

$$p(\vec{x}, t) = \tilde{p}_0(\vec{x}, t) \text{ на } \partial Q = \partial\Omega \times (0, T) \quad (5.182)$$

$$\vec{w}(x, t) = -\frac{k}{\mu} \cdot \text{grad } p(\vec{x}, t) \text{ в } Q \quad (5.183)$$

Теперь пусть вся рассматриваемая область $\Omega \in R^3$ с границей $\partial\Omega$, как в линейном случае, разбита на область фильтрации $G_1 \subset \Omega$, с границей ∂G_1 (за фронтом возмущения) и невозмущенную область $G_2 \subset \Omega$, с границей ∂G_2 (перед фронтом возмущения), $G_1 \cup G_2 = \Omega$. Начально-краевую задачу в случае простейшей модели фильтрации с постоянной скоростью распространения возмущений можно поставить так: найти давление $p(\vec{x}, t)$ в области $G_1 \subset \Omega$, с границей ∂G_1 , удовлетворяющим начально-краевым условиям

$$\tau \frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial t} = \chi \cdot \nabla^2 p(\vec{x}, t) \text{ в } \tilde{Q} = G_1 \times (0, T), \quad (5.184)$$

$$p(\vec{x}, 0) = p_0(\vec{x}) \text{ в } G_1 \quad (5.185)$$

$$\frac{\partial p(\vec{x}, 0)}{\partial t} = p_1(\vec{x}) \text{ в } G_1 \quad (5.186)$$

$$p(\vec{x}, t) = \tilde{p}_0(\vec{x}, t) \text{ на } \partial\tilde{Q} \quad (5.187)$$

Зная давление, можно определить скорость фильтрации и другие физические характеристики пласта [10].

5.4.2 Применение алгоритмов методов Монте – Карло

Рассмотрим задачу (5.180) – (5.183). Дискретизируя (5.180) только по временной переменной с шагом $\Delta t = T/N$ (чисто неявная схема) получим

$$\frac{p^{n+1}(\vec{x}) - p^n(\vec{x})}{\Delta t} = \chi \nabla^2 p^{n+1}(\vec{x}).$$

Обозначим $c \equiv 1/(\Delta t \chi) > 0$, $c = const$. Тогда

$$\Delta p^{n+1}(\vec{x}) - cp^{n+1}(\vec{x}) = -p^n(\vec{x}), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad \text{в } \Omega. \quad (5.188)$$

Начальные и граничные условия примут следующий вид

$$p^0(\vec{x}) = p_0(\vec{x}), \quad \text{в } \Omega. \quad (5.189)$$

$$p^n(\vec{x}) = \tilde{p}^n(\vec{x}), \quad n = 0, \dots, N \quad \text{в } \Omega. \quad (5.190)$$

Уравнение (5.183) примет вид

$$\vec{w}^{n+1}(\vec{x}, t) = -\frac{k}{\mu} \cdot \text{grad } p^{n+1}(\vec{x}) \quad n = 0, \dots, N \quad \text{в } Q. \quad (5.191)$$

Задача (5.188) – (5.190) для всех фиксированных $n = 0, \dots, N$ является задачей Дирихле для уравнения Гельмгольца. Ее решение $p^n(\vec{x})$ и первые производные от решения $\partial p^n / \partial x_i$ для всех $n = 0, \dots, N$ оценим либо с помощью алгоритма "блуждания по сферам" либо с помощью алгоритма, указанного в первом параграфе этой главы. Зная первые производные от давления, из уравнения (5.191) можно определить скорость фильтрации.

Рассмотрим задачу (5.184) – (5.187). Также дискретизация только по времени (чисто неявная схема) уравнения (5.184) дает

$$\Delta p^{n+1}(\vec{x}) - ap^{n+1}(\vec{x}) = -f^n(\vec{x}) \quad n = 0, \dots, N \quad \text{в } G_1, \quad (5.192)$$

где

$$a = \frac{1}{\chi \cdot \Delta t} \left(\frac{\tau}{\Delta t} + 1 \right), \quad f^n(\vec{x}) = bp^n(\vec{x}) + dp^{n-1}(\vec{x}),$$

$$b = \frac{2\tau}{(\Delta t)^2}, \quad d = \left(\frac{\tau}{(\Delta t)} - \frac{1}{\Delta t} \right).$$

Граничное и начальное условия переписуются так:

$$p^n(\vec{x}) = \tilde{p}^n(\vec{x}) \quad n = 0, \dots, N \quad \text{в } G_1, \quad (5.193)$$

$$p^0(\vec{x}) = p_0(\vec{x}), \quad \text{в } G_1, \quad (5.194)$$

$$p^1(\vec{x}) = \Delta t p_1(\vec{x}) + p_0(\vec{x}) \quad \text{в } G_1. \quad (5.195)$$

В этом случае задача (5.192) – (5.195) для фиксированных $n = 0, \dots, N$ является задачей Дирихле для уравнения Гельмгольца. Ее решение и производные от решения оцениваются методами Монте–Карло также как решение и производные от решения предыдущей задачи.

Замечание 5.2 При постановке граничных условий мы должны учитывать то обстоятельство, что граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из непроницаемой поверхности $\partial\Omega_1$, поверхности $\partial\Omega_2$, соответствующей нагнетательным скважинам и поверхности $\partial\Omega_3$, соответствующей эксплуатационным скважинам. При оценивании решения методами Монте–Карло, либо "блужданием по сферам" либо "блужданием по границам" мы, достигнув ε -границы области, то есть $\partial\Omega_\varepsilon$, учитываем "вес" данной граничной точки; если эта граничная точка $\vec{x}^* \in \partial\Omega_1$, то суммируется к счетчику заданные граничные данные, умноженные на "вес" этой точки; если эта граничная точка $\vec{x}^* \in \partial\Omega_2$, то будут учитываться дебиты скважин, а если $\vec{x}^* \in \partial\Omega_3$, то, конечно, будет учитываться отбор смеси.

5.5 Методы Монте–Карло для решения одной

модельной задачи фильтрации в потенциалах

Следуя [11], рассмотрим модельную задачу фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. В цилиндре $Q = \{\Omega \times (0, T)\}$ с

границей $\partial Q = \partial\Omega \times (0, T)$ ищется решение задачи

$$\operatorname{div}(N \operatorname{grad} R) + \operatorname{div}(M \operatorname{grad} P) + f_1 + f_2 = 0, \quad \text{в } Q, \quad (5.196)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \operatorname{div}(M \operatorname{grad} R) + \operatorname{div}(N \operatorname{grad} P) + f_1 - f_2 = 0, \quad \text{в } Q, \quad (5.197)$$

$$2R(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.198)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(P + R) = 0, \quad \text{на } \partial Q, \quad (5.199)$$

$$P = R, \quad \text{на } \partial Q, \quad (5.200)$$

где $M = k_1 + k_2 > 0$, $N = k_1 - k_2$.

Здесь искомыми функциями являются P и R

$$2R = U_1 - U_2, \quad 2P = U_1 + U_2$$

Дискретизируем (5.196) – (5.200) только по временной переменной и будем считать, что на момент времени $t = n\tau$ нам известны P^n и R^n . Тогда для определения P^{n+1} на временных слоях из (5.196), (5.200) будем иметь задачу Дирихле для эллиптического уравнения

$$\operatorname{div}(M \operatorname{grad} P^{n+1}) + f^n = 0, \quad \text{в } Q, \quad (5.201)$$

$$P^{n+1} = R^n, \quad \text{на } \partial Q, \quad (5.202)$$

где $f^n = \operatorname{div}(N \operatorname{grad} R^n) + f_1^n + f_2^n$.

Используя (5.197) – (5.199), для определения R^{n+1} на временных слоях, получим задачу Неймана для эллиптического уравнения

$$R^{n+1} - \tau \operatorname{div}(M \operatorname{grad} R^{n+1}) = g^{n+1}, \quad \text{в } \Omega, \quad (5.203)$$

$$\frac{\partial R^{n+1}}{\partial n} = -\frac{\partial P^{n+1}}{\partial n} \equiv h^{n+1}, \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (5.204)$$

где $g^{n+1} = \tau(\operatorname{div}(N \operatorname{grad} P^{n+1}) + f_1^{n+1} - f_2^{n+1}) + R^n$. Задачу (5.201)-(5.202) решаем с помощью алгоритмов либо "блуждания по сферам" либо "блуждания по границам". [136], [133], [141]. Методами Монте-Карло оцениваются производные от решения $\operatorname{grad} P^{n+1}$ и $\operatorname{div}(N \operatorname{grad} P^{n+1})$.

Будем считать, что область Ω – ограниченная выпуклая, а граница $\partial\Omega$ – достаточно гладкая, такая, что справедлива формула Грина. Также предположим $M = c = \text{const} > 0$. Тогда $\operatorname{div}(M \operatorname{grad} P^{n+1}) = M\Delta P^{n+1}$ и в этих предположениях с помощью функции Леви для оператора $-\Delta + a(x)$, $a(x) \geq 0$ можно определить интегральное уравнение для решения

задачи (5.203) – (5.204) с нормой интегрального оператора, действующего в $C(\bar{\Omega})$, меньше единицы. Уравнение (5.203) запишем в виде

$$-\Delta R^{n+1} + a(x)R^{n+1} = \tilde{g}, \quad x \in \Omega, \quad (5.205)$$

где $a(x) = (1/(\tau \cdot c)) = \text{const} > 0$, $\tilde{g}^{n+1}/a(x)$. Пусть $a(x) \leq c_1^2$, $c_1 = \text{const} > 0$. Тогда функция $v(x, y) = \exp(-c_1 r)(\sigma_m(m-2)r^{m-2})^{-1}$, где $r = |x - y|$ является функцией Леви для оператора $-\Delta + a(x)$, причем этот оператор – формально самосопряженный. Интегральное уравнение для задачи (5.204) – (5.205) будет иметь вид

$$R^{n+1}(x) = \int_{\bar{\Omega}} (1 - q(x, y))p(x, y)R^{n+1}(y)d\mu(y) + F, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где

$$p(x, y) = \frac{1 + I_{\partial\Omega}(x)}{\sigma_m} \cdot \begin{cases} k_1(r) \cos \varphi_{xy}/r^{m-1}, & y \in \partial\Omega, \\ k_2(r)/r^{m-1}, & y \in \Omega, \end{cases}$$

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & y \in \partial\Omega, \\ \frac{a(y)r \exp(-c_1 r)}{k_2(r)(m-2)}, & y \in \Omega, \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1 + I_{\partial\Omega}(x)}{\sigma_m} (F_1(x) + F_2(x))$$

Здесь $I_{\partial\Omega}(x)$ – индикатор границы, мера μ определена на σ -алгебре борелевских подмножеств Ω равенством $\mu(A) = \lambda(A) + S(A \cap \partial\Omega)$, λ – мера Лебега в R^m , S – площадь поверхности,

$$k_1(r) = \left(1 + \frac{c_1 r}{m-2}\right) \exp(-c_1 r), \quad k_2(r) = \frac{c_1^2 + c_1(m-3)}{m-2} \exp(-c_1 r),$$

$$F_1(x) = \int_{\Omega} \frac{\exp(-c_1 r)}{r^{m-2}} \tilde{g}^{n+1}(y) dy, \quad F_2(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\exp(-c_1 r)}{r^{m-2}} h^{n+1}(y) d_y y,$$

Поскольку область Ω – выпуклая, то $p(x, y) \geq 0$. Если $a(x) \equiv 0$, $h^{n+1}(x) \equiv 0$, $\tilde{g}^{n+1}(x) \equiv 0$, то $R^{n+1} \equiv 1$ является решением задачи Неймана. Подставляя ее в (5.205), убеждаемся, что $p(x, y)$ – переходная плотность. Ясно, что $0 \leq q(x, y) \leq 1$, так как $a(x) \leq c_1^2$. Если $a(x) \neq 0$, то норма интегрального оператора в уравнении (5.205), действующего в $C(\bar{\Omega})$ меньше 1. Следовательно, к интегральному уравнению применима схема Неймана–Улама. Теперь можно построить несмещенные оценки решения задачи (5.204) – (5.205), причем с конечными дисперсиями.

Некоторые наиболее простые оценки решения с конечными дисперсиями можно найти в работе [15]. Для решения задачи (5.203) – (5.204) можно применять схему, обобщающую схему Неймана–Улама, – метод выделения главной части оператора. Все процессы типа "блуждания по сферам" с выделением ε -окрестности границы укладываются в схему выделения главной части оператора при малой норме интегрального оператора.[16].

В работе [41] предложен алгоритм случайного блуждания по границе для внешней задачи Неймана для самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка общего вида. Решив задачи (5.201) – (5.202) и (5.204) – (5.205) для $(n+1)$ -го шага по времени переходим к следующему временному слою и т.д.

При численном решении задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости следует учитывать некоторые особенности этих задач. Например, следует учитывать при построении разностных схем особенность, связанную с сильноменяющимися разрывными коэффициентами в подобластях. Эта трудность, связанная с выбором шага, легко устраняется, когда для оценки решения используются алгоритмы методов Монте-Карло, связанные с моделированием цепей Маркова. В этом случае переход в те точки, где коэффициенты терпят разрыв, не осуществляется. То есть траектории цепи должны "иметь возможность" начинаться в тех точках, а при переходе $x \rightarrow y$ попадать в те точки области, где коэффициенты не имеют точек разрыва.

6

Заключение

1. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения уравнений Стокса.
2. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса.
3. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения полных уравнений Навье–Стокса.
4. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения разностного аналога возмущенных уравнений Навье–Стокса. Доказана ограниченность дисперсии построенной оценки.
5. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения стационарных линеаризованных уравнений слабо сжимаемой жидкости (уравнения Ламе).
6. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения граничных интегральных уравнений для уравнения Навье–Стокса.
7. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения разностного аналога уравнений Навье–Стокса.

8. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения стационарной задачи фильтрации (для модели Маскета–Леверетта).
9. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения нестационарной задачи фильтрации (для модели Маскета–Леверетта).
10. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения регулярной и вырождающейся задачи фильтрации (для модели Маскета–Леверетта).
11. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения задач релаксационной фильтрации.
12. Построена ε -смещенная оценка решения и производных от решения одной модельной задачи фильтрации в потенциалах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Hall A. On an experiment determination of π // *messeng. Math.* (1873) 2. –Р. 113–114
- [2] Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo method // *J. Amer. Stat. Assoc.* (1949) 44, 247. –Р. 335–341.
- [3] Чавчанидзе В.В. Метод случайных испытаний (Метод Монте–Карло). / Труды института физики АН Груз. ССР. 1955, 3. – Тбилиси. –105 с.
- [4] Чавчанидзе В.В. Применение метода случайных испытаний к расчету внутриядерного каскада. // *Изв. АН СССР, сер. физ.* (1955) 19, 6, –С. 629–638.
- [5] Шрейдер Ю.А. Метод статистических проб (Монте–Карло) и его использование в цифровых машинах. / *Приборостроение.* 1955, 7, –М. –С. 1–7.
- [6] Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. Мир, –М., 1981.–408 с.
- [7] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Наука, –М., 1970. –288 с.
- [8] Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье–Стокса. Наука, –М., 1985. –311 с.
- [9] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Наука, –Новосибирск, 1983. – 319 с.

- [10] Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. Издательство Казанского университета, –Казань, 1987.–106 с.
- [11] Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Наука, –Новосибирск, 1988. –166 с.
- [12] Ермаков С.М. Метод Монте–Карло и смежные вопросы. Издание второе , дополненное. Наука, –М., 1975. –471 с.
- [13] Елепов Б.С., Кронберг А.А., Михайлов Г.А., Сабельфельд К.К. Решение краевых задач методом Монте–Карло. Наука, – Новосибирск, 1980. –173 с.
- [14] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. Издание второе. Наука, –М., 1982. –296 с.
- [15] Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.А. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. Наука, –М., 1984. –205 с.
- [16] Ермаков С.М., Сипин А.С. Новая схема метода Монте–Карло для решения задач математической физики. ДАН СССР, 1985, Том 285, 3, С. 597 – 600.
- [17] Елепов Б.С., Михайлов Г.А. Алгоритм "блуждания по сферам" для уравнения $\Delta u - c \cdot u = -g$. // ДАН СССР, 1973, 212, 1. –С. 15–18.
- [18] Курбанмурадов О.А. Оценка математического ожидания числа шагов ε -сферического процесса. // Методы Монте–Карло в вычислительной математике и математической физике, часть 2. – Новосибирск, 1979. –С. 137–144.
- [19] Курбанмурадов О.А., Сабельфельд К.К., Симонов Н.А. Алгоритмы случайного блуждания по границе. АН СССР СО ВЦ.–Новосибирск, 1989. –162 с.
- [20] Мейер П.А. Вероятность и потенциалы. Мир, –М., 1976. –436 с.
- [21] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, –М., 1957. –376 с.

- [22] Мишустин Б.А. О решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом статистических испытаний. // ЖВМиМФ. –1967. –Т. 7, 5. –С. 1178–1187.
- [23] Пушкарев Л.И., Расулов А.С. Решение некоторых краевых задач с нелинейностью в граничном условии моделированием блужданий по сферам. // Вопросы вычислительной и прикладной математики. / Сборник научных трудов. Выпуск 61. –Ташкент, 1980. –С. 47–52.
- [24] Расулов А.С. Решение некоторых уравнений в частных производных методом Монте–Карло: Автореф. дис. канд. Ташкент, ТашГУ, 1979. –15 с.
- [25] Расулов А.С., Сипин А.С. Решение одного нелинейного уравнения методом Монте–Карло. // Методы Монте–Карло в вычислительной математике и математической физике. –Новосибирск, 1976. –С. 149–155.
- [26] Сипин А.С. Решение задачи Дирихле для уравнения $-\Delta u + a(x) \cdot u = f(x)$ методом Монте–Карло. // Вестник ЛГУ, серия матем., мех., астр., 1976, 1. –С. 60–63.
- [27] Сипин А.С. О решении задачи Неймана методом Монте–Карло. // Методы Монте–Карло в вычислительной математике и математической физике. –Новосибирск, 1976. –С. 129–135.
- [28] Сипин А.С. Решение первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа методом Монте–Карло. // Методы Монте–Карло в вычислительной математике и математической физике. –Новосибирск, 1979. –С. 113–119.
- [29] Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Наука, –М., 1985. –640 с.
- [30] Сипин А.С. Решение двух краевых задач Дирихле методом Монте–Карло. // ЖВМиМФ. –1979. –Т. 19, 2. –С. 388–401.
- [31] Соболев И.М. Численные методы Монте–Карло. Наука, –М., 1973. –306 с.
- [32] Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. Наука, –М., 1969. –253 с.

- [33] Спанье Дж., Гелбард Э. Метод Монте–Карло и задачи переноса нейтронов. Атомиздат, –М., 1972. –374 с.
- [34] Сабельфельд К.К. Векторные алгоритмы метода Монте–Карло для решения систем эллиптических уравнений второго порядка и уравнения Ламе. // ДАН СССР, –1982. –Т. 262, 6. –С. 1011–1016.
- [35] Сабельфельд К.К. Некоторые способы построения резольвенты при решении интегральных и дифференциальных уравнений методом Монте–Карло. // Теория и приложения статистического моделирования. / Сб. научных трудов. ВЦ СО АН СССР. – Новосибирск, 1985. –С. 1–20.
- [36] Сабельфельд К.К., Симонов Н.А. Алгоритмы случайного блуждания по границе для решения краевых задач. // Численные методы механики сплошной среды. 14, 1. / Сб. научных трудов. ВЦ ИТПМ СО АН СССР, 1983. –С. 116–134.
- [37] Sabelfeld K.K. and Talay D. Integral Formulation of the Boundary Value Problems and the Method of Random Walk on Spheres. Monte Carlo Methods and Appl., Vol. 1, No. 1, 1995. –p. 1–35.
- [38] Simonov N.A. Boundary Value Problem and Stochastic Algorithm for Two–dimensional Navier–Stokes Equations. Monte Carlo Methods and Appl., Vol. 1, No. 1, 1995. –p. 1–35.
- [39] Симонов Н.А. Алгоритмы случайного блуждания по границе для решения некоторых краевых задач. / Препринт 472, АН СССР СО ВЦ, –Новосибирск, 1984. –12 с.
- [40] Симонов Н.А. Моделирование траекторий случайного блуждания по границе с использованием аналитического продолжения. // Математические и имитационные модели систем. СМ–9. / Сб. научных трудов. ВЦ СО АН СССР. –Новосибирск, 1983. –С. 40–44.
- [41] Симонов Н.А. Алгоритмы статистического моделирования для решения эллиптических уравнений второго порядка. / Препринт 698, АН СССР СО ВЦ. –Новосибирск, 1986. –21 с.
- [42] Tsuda T., Ichida K. Nolinear interpolation of multivariable functions by the Monte Carlo method. // J. Assoc. Comp. Mach. 1970, 17, 3. –P. 420–425.

- [43] Tsuda T., Kiyono T. Application of the Monte Carlo method to system of nonlinear algebraic equations. // Numerische Mathematic, 1964, 6. –P. 59–67.
- [44] Михайлов Г.А. Оптимизация весовых методов Монте–Карло. Наука, –М., 1987. –239 с.
- [45] Михайлов Г.А. Трудоемкость методов Монте–Карло для глобальной оценки решений многомерных задач. / Препринт 922, АН СССР СО ВЦ, –Новосибирск, 1990. –35 с.
- [46] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Том 1. Мир, –М., 1984. –527 с.
- [47] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. Мир, –М., 1967. –752 с.
- [48] Уилкс С. Математическая статистика. Наука, –М., 1967. –632 с.
- [49] Шметтерер Л. Введение в математическую статистику. Наука, –М., 1976. –520 с.
- [50] Уиттл П. Вероятность. Наука, –М., 1982. –287 с.
- [51] Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. Мир, –М., 1964. –243 с.
- [52] Kemperman J.H.V. The Passage Problem for a Stationary Markov Chain.
// University of Chicago Press, 1961. –P. 97–121.
- [53] Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Физматгиз, –М., 1963. –256 с.
- [54] Спицер Ф. Принципы случайного блуждания. Мир, –М., 1968. –472 с.
- [55] Barucha–Reid A.T. Elements of the Theory of Stochastic Processes and Their Applications. McGraw–Hill, –New York, 1960. –345 p.
- [56] Benes V.E. General Stochastic Processes in the Theory of Queues. Addison–Wesley, –Reading, 1963. –423 p.
- [57] Prabhu N.U. Stochastic Processes. McMillan, –New York, 1965. –431 p.
- [58] Takacs L. Stochastic Processes. –New York, 1960. –278 p.

- [59] Дуб Дж. Вероятностные процессы. ИЛ, –М., 1956. –542 с.
- [60] Кушнер Г.Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. Наука, М., 1985. –222 с.
- [61] Albert G.E. A general theory of stochastic estimates of the Meumann series for the solution of certain Fredholm integral equations and related series // Sympos. on Monte Carlo Methods, ed. H.A. Meyer, –Wiley, 1956. –P. 37–46.
- [62] Бахвалов Н.С. О приближенном вычислении кратных интегралов. // Вестник МГУ, 4, 1959. –С. 3–18.
- [63] Бахвалов Н.С. Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул. // ЖВМиМФ. –1961. –Т. 1, 1. –С. 64–77.
- [64] Бахвалов Н.С. Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте–Карло на классах функций. / Сб. "Численные методы решения дифф. и интегр. уравнений Наука, –М., 1964. –С. 5–63.
- [65] Бусленко Н.П., Голенко Д.И., Соболев И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (метод Монте–Карло). СБМ. Физматгиз, –М., 1962. –365 с.
- [66] Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте–Карло) и его реализация в цифровых машинах. Физматгиз, –М., 1961. –207 с.
- [67] Forsythe G.E., Leibler R.Z. Matrix inversion by a Monte Carlo methods. // Math. tables and other aids to Comp., 1950, 4. –P. 127–129.
- [68] Wasow W. On the mean duration of random walks. // J. Res. Nat. Bur. Stand. 1951, 46. –P. 462–472.
- [69] Wasow W. A note on the inversion of matrices by random walks. // Math. Tabl. Aids Comput. 1952, 6. –P. 78–81.
- [70] Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. ИЛ, –М., 1961. –432 с.

- [71] Владимиров В.С. О применении метода Монте–Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения. // Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1. –С. 113–130.
- [72] Владимиров В.С., Соболев И.М. Расчет наименьшего характеристического числа уравнений Пайерлса методом Монте–Карло. // Вычислит. математика, 1958, 3. –С. 130–137.
- [73] Вагнер В. Оценивание методом Монте–Карло обобщенных главных значений интегралов. Автореферат канд. диссертации. ЛГУ. – Ленинград, 1980. –110 с.
- [74] Вагнер В. О несмещенности некоторых оценок метода Монте–Карло в знакопеременном случае. // ЖВМиМФ. –1982.–Т. 32, 3. –С. 125–138.
- [75] Вагнер В., Ермаков С.М. О представлении решений нелинейных уравнений континуальными интегралами. // ДАН СССР. –1982. – Т. 267, 6. –С. 1346–1350.
- [76] Wagner W. On the representation of solutions of integral equations with analytic nonlinearity as the expectation of a random variable. / Preprint, P–MATH–08/84. Akademie der Wissenschaften der DDR Institut für Mathematik. –Berlin, 1984. –24 p.
- [77] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. Наука, –М., 1984. –318 с.
- [78] Гельфанд И.М., Фейнберг С.М., Фролов А.С., Ченцов Н.Н. О применении метода случайных испытаний (метода Монте–Карло) для решения кинетического уравнения. / Труды 2–й Международной Женевской конференции по применению атомной энергии в мирных целях. Т. 5, –Женева, 1958. –С. 32–45.
- [79] Гельфанд И.М., Фролов А.С., Ченцов Н.Н. Вычисление континуальных интегралов методом Монте–Карло. // Известия вузов, сер. матем., 1958, 6, 5. –С. 56–78.
- [80] Гладкий В.С. Вероятностные вычислительные модели. Наука, –М., 1973. –234 с.

- [81] Кац М. О некоторых связях между теорией вероятностей и дифференциальными и интегральными уравнениями. / Математика (сборник переводов), 1957, 1, 2. –С. 95–124.
- [82] Кертис Д. Методы Монте–Карло для итерации линейных операторов. // Успехи матем. наук, 1957, 12, 5(77). –С. 149–174.
- [83] Коробов Н. М. Теоретико–числовые методы в приближенном анализе. Физматгиз, –М., 1963. –267 с.
- [84] Кронберг А.А. Вычисление производных от решения внутренних и внешних задач Неймана. // Численные методы механики сплошной среды. / Сб. научных трудов. 14, 1. ВЦ ИТПМ СО АН СССР. – Новосибирск, 1983. –С. 77–83.
- [85] Muller M.E. Some continuons Monte Carlo methods for the Dirichlet problem.
// Ann. of Math. Stat. 1956, 27, 3. –P. 569–583.
- [86] Muller M.E. A note on method for generating points uniformly on N –dimensional spheres. // Communs Assoc. Math. 1959, 2, 4. –P. 19–20.
- [87] von Neuman J. Various techniques used in connection with random digits. Monte Carlo method. // Nath. Bur. Stand. Math. Series, 1951, 12. –P. 36–38.
- [88] Некруткин В.В. Вычисление интегралов по пространству деревьев методом Монте–Карло. // Методы Монте–Карло в вычислительной математике и математической физике. / Сб. научных трудов, – Новосибирск. 1974. –С. 94–102.
- [89] Некруткин В.В. Прямая и сопряженная схема Неймана–Улама для решения нелинейных интегральных уравнений. // ЖВМиМФ. 1974, 14, 6. –С. 1409–1415.
- [90] Niederreiter H. On the distribution of pseudo–random numbers generated by the Linear Congruential Method. // Math. Comp. 1972, 26, 119. –P. 793–795.
- [91] Nuding E., Kuwert D. Monte Carlo Losung des Dirichlet–Problems der Gleichung $-\Delta u + k^2 u = f(x, y)$. // ZAMM, 60. –P. 311–312.

- [92] Сарымсаков Г.А. Основы теории процессов Маркова. Гостехиздат, –М., 1954. –243 с.
- [93] Haji-Sheikh A., Sparrow E.M. The floating random walk and its application to Monte Carlo solutions of heat equations. // SIAM J. Appl. Math. 1966, 14, 2. –P. 370–389.
- [94] Hammersley J.M. Monte Carlo methods for solving multivariable problems. // Ann. New York Acad. Sci. 1960, 86. –P. 844–874.
- [95] Hammersley J.M., Handscomb D.C. Monte Carlo methods. –London–N.Y., 1964. –473 p.
- [96] Hicks B.L., Smith M.A. On the accuracy of Monte Carlo solutions of the nonlinear Boltzman equations. // J. Comp. Phis. 1968, 3. –P. 58–79.
- [97] Hicks B.L., Wheeling R.E. A efficient method for generating uniformly distributed points on the surface of an n -dimensional sphere. // Comm. Assoc. Comp. Mach. 1959, 2, 1. –P. 17–19.
- [98] Хисамутдинов А.И. Об эффективности метода математических ожиданий для задач одного класса. // ЖВМиМФ. 1967, 7, 4. –С. 946–953.
- [99] Хисамутдинов А.И. Оценка функционала от решения сопряженного уравнения переноса методом Монте–Карло. // ЖВМиМФ. 1968, 8, 2. –С. 467–471.
- [100] Хисамутдинов А.И. "Единичный" класс оценок для вычисления по методу Монте–Карло функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода. // ЖВМиМФ. 1970, 10, 5. –С. 1269–1280.
- [101] Хисамутдинов А.И. Оценки "единичного" класса с минимальной дисперсией. // Вероятностные методы решения задачи математической физики. / Сб. научных трудов. –Новосибирск. 1971. –С. 184–210.
- [102] Хисамутдинов А.И. Оценки с минимальными абсолютными моментами для вычисления методом Монте–Карло суммы ряда Неймана. // ДАН СССР, 1973, 212, 2. –С. 308–311.
- [103] Хисамутдинов А.И. Несмещенные случайные оценки итераций интегрального оператора со степенной нелинейностью. // ЖВМиМФ. 1981, 21, 2. –С. 118–131.

- [104] Halton J.H. Sequential Monte Carlo. // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1962, 58, 1. –P. 57–78.
- [105] Halton J.H. A retrospective and prospective survey of the Monte Carlo method. // SIAM Rev. 1970, 12, 1. –P. 1–63.
- [106] Hoshino S., Ichida K. Solution of Partial Differential Equations by a Modified Random Walk. // Numer. Math. 1971, 18, 1. –P. 61–72.
- [107] Хэвиленд Дж. К. Решение двух задач о молекулярном течении методом Монте–Карло. // "Вычислительные методы в динамике разреженных газов". / Сборник научных трудов. Мир. –М., 1969. –С. 7–115.
- [108] Haviland J. K., Lavin M.L., Trilling S.A. Application of the Monte Carlo method to rarified gas flows. // Fluid Dynamics Trans. 1964, 1, Pergomen press. –P. 279–286.
- [109] Handscomb D.C. Remarks on a Monte Carlo integration method. // Numerische Math. 1964, 6, 4. –P. 261–268.
- [110] Ермаков С.М., Шакенов К.К. О применении метода Монте–Карло к уравнениям Навье–Стокса. Редколлегия журнала "Вестник ЛГУ, серия математика, механика, астрономия". Ленинград, 1986. –М. (Деп. в ВИНТИ, 26.06.86, 6267 – В86).
- [111] Ермаков С.М., Шакенов К.К. О применении метода Монте–Карло к разностному аналогу уравнений Навье–Стокса. Редколлегия журнала "Вестник ЛГУ, серия математика, механика, астрономия". Ленинград, 1986. –М. (Деп. в ВИНТИ, 30.10.86, 8576 – В86).
- [112] Шакенов К.К. О дискретизации линеаризованных уравнений Навье–Стокса по временной переменной и применение метода Монте–Карло. // Функциональный анализ, дифференциальные уравнения и их приложения. / Сборник научных трудов. МинВУЗ КазССР, КазГУ, –Алма–Ата, 1987. –С. 69–75
- [113] Шакенов К.К. О применении метода Монте–Карло к линеаризованным уравнениям Навье–Стокса. // Тезисы докладов на Всесоюзной школе–семинаре "Методы Монте–Карло и их приложения 18 – 28 сентября 1987 г., –Алма–Ата, 1987. –С. 132.

- [114] Шакенов К.К. О дискретизации возмущенных уравнений Навье–Стокса и применение метода Монте–Карло. –Алма–Ата.(Деп. в КазНИИТИ, 16.06.88, 2181 – Ка88).
- [115] Шакенов К.К. О дисперсии одной оценки. // Теория функций, уравнения математической физики и их приложения. / Сборник научных трудов. МинВУЗ, КазССР, КазГУ, –Алма–Ата, 1988. –С. 72–74.
- [116] Шакенов К.К. Аппроксимация возмущенных уравнений Навье–Стокса и применение метода Монте–Карло. // Тезисы докладов на 2–ой Республиканской конференции по проблемам вычислительной математики и автоматизации научных исследований. 2 – 6 октября 1988 г. Т. 1, Вычислительная математика и математическое моделирование, Наука, –Алма–Ата, 1988. –С. 106.
- [117] Шакенов К.К. Линеаризованные уравнения Навье–Стокса и алгоритмы методов Монте–Карло. // Тезисы докладов на 9–ой Республиканской межвузовской научной конференции по математике и механике. 12 – 15 сентября 1989 г. Часть 2, Вычислительная математика, информатика. –Алма–Ата, 1989. –С. 54.
- [118] Шакенов К.К. Алгоритмы Узавы, Эрроу–Гурвица для решения задачи Стокса и методы Монте–Карло. // Тезисы докладов на 8–ом Всесоюзном совещании "Методы Монте–Карло в вычислительной математике и математической физике 19 – 21 февраля 1991 г. Часть 1, –Новосибирск, 1991. –С. 168–170.
- [119] Shakenov K.K. The Uzawa and Errow–Hurwicz algorithms for the solution of the Navier–Stokes equations and the methods of Monte Carlo. // Тезисы докладов на III–ей Международной конференции по модельно–ориентрованному анализу данных MODA–3 (MODEL–ORIENTED DATA ANALYSIS), 25 – 30 мая 1992 г., Санкт–Петербургский университет, Санкт–Петербург, Петродворец, Nova Science Publishers Ins., –New York, 1992. –Р. 123.
- [120] Шакенов К.К. Применение методов Монте–Карло к алгоритмам Узавы и Эрроу–Гурвица. Доклады Национальной Академии Наук Республики Казахстан, 2, 1993. –С. 8–13.

- [121] Шакенов К.К. Об одном методе Монте–Карло вычисления производных от решения. // Тезисы докладов на конференции посвященной 70–летию чл.–корр. НАН РК Т.И. Аманова "Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики". –Алматы, 1993. –С. 176–177.
- [122] Шакенов К.К. Полные уравнения Навье–Стокса и применение методов Монте–Карло. / Материалы школы–семинара по математике и механике, посвященного 60–летию чл.–корр. НАН РК К.А. Касымова. 25 – 27 октября 1995 г. "Гылым–Алматы, 1995. –С. 157.
- [123] Усенова А.Ж., Шакенов К.К. Об одном алгоритме методов Монте–Карло. // Вестник КазГУ, серия математическая. Выпуск 3, Издательство КазГУ, –Алматы, 1995. –С. 160–163.
- [124] Назарбекова К.Т., Шакенов К.К. О решении методом Монте–Карло стационарных линейаризованных уравнений слабо сжимаемой жидкости. –Алматы. (Деп. в КазгосИНТИ, 16.01.96, 6641 – Ка96).
- [125] Шакенов К.К. Применение методов Монте–Карло для решения задачи динамики вязкой жидкости. // Тезисы докладов на Международной конференции "Математические модели и численные методы механики сплошных сред" посвященной 75–летию Н.Н. Яненко. 27 мая – 2 июня 1996 г. –Новосибирск, 1996. –С. 135.
- [126] Смагулов Ш.С., Шакенов К.К. Приближенное решение регулярной задачи двухфазной фильтрации методом Монте–Карло. // Тезисы школы семинара по механике и ее приложениям, посвященного 70–летию чл.–корр. НАН РК, профессора Ш.А. Ершина. 5 и 6 сентября 1996 г. –Алматы, 1996. –С. 97–98.
- [127] Усенова А.Ж., Шакенов К.К. О решении методом Монте–Карло граничных интегральных уравнений. // Тезисы докладов Первого Съезда математиков Казахстана. 11 – 14 сентября 1996 г. –Шымкент, 1996. –С. 279–280.
- [128] Смагулов Ш.С., Шакенов К.К. О решении задачи фильтрации методом Монте–Карло. // Тезисы докладов Первого Съезда математиков Казахстана. 11 – 14 сентября 1996 г. –Шымкент, 1996. –С. 276–277.

- [129] Смагулов Ш.С., Шакенов К.К. О решении стационарной задачи двухфазной фильтрации методом Монте–Карло. / Материалы Международной конференции "Актуальные проблемы математики и математического моделирования экологических систем" посвященной 60–летию академика Султангазина У.М. 3 – 5 октября 1996 г. "Гылым–Алматы, 1996. –С.
- [130] Усенова А.Ж., Шакенов К.К. О решении методом Монте–Карло граничных интегральных уравнений. –Алма–Ата.(Деп. в КазгосИНТИ, 14.01.97, 7360 – Ка97).
- [131] Шакенов К.К. О решении стационарной задачи двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей методом Монте–Карло. / Материалы Казахстанско–Российской научно–практической конференции "Математическое моделирование научно–технологических и экологических проблем в нефтедобывающей промышленности". 16 – 17 октября 1997 г. Республика Казахстан, –Алматы, 1997. –С.
- [132] Шакенов К.К. On solving relaxation filtration problems by Monte Carlo methods. Материалы 2–ой Казахстанско–Российской научно–практической конференции "Математическое моделирование научно–технологических и экологических проблем в нефтегазодобывающей промышленности". 24 – 25 сентября 1997 г. Республика Казахстан, –Алматы, 1998. –С.
- [133] Смагулов Ш.С., Тастанов М.Г., Шакенов К.К. О решении трехмерной стационарной задачи фильтрации методами Монте–Карло. // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. 11, "Казак университеті–Алматы, 1998. –С. 150–163.
- [134] Тастанов М.Г., Шакенов К.К. О численном решении методами Монте–Карло регулярной начально–краевой задачи двухфазной фильтрации. / Материалы Международной научно–практической конференции "Проблемы вычислительной математики и информационных технологий". 25 – 26 марта 1999 г. –Алматы, 1999. –С. 347.
- [135] Шакенов К.К. О решении одной модели релаксационной фильтрации методами Монте–Карло. / Материалы Международной научно–практической конференции "Проблемы вычислительной

- математики и информационных технологий". 25 – 26 марта 1999 г. – Алматы, 1999. – С. 379.
- [136] Смагулов Ш.С., Шакенов К.К. Методы Монте–Карло в задачах гидродинамики и фильтрации. "Казак университеті – Алматы, 1999. – 170 с.
- [137] Тастанов М.Г., Шакенов К.К. Методы Монте–Карло для решения задач фильтрации. // Тезисы докладов 2–ой Международной научной конференции "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры". 15 – 19 сентября 1999 г. Актюбинский университет. – Актюбе, 1999 г. – С.
- [138] Шакенов К.К., Тастанов М.Г. Методы Монте–Карло для решения одной модельной задачи фильтрации в потенциалах. // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. 5 (19), "Казак университеті – Алматы, 2000. – С. 184–187.
- [139] Шакенов К.К. Решение задач релаксационной фильтрации методами Монте–Карло. // Тезисы докладов на Четвертом Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ – 2000), посвященный памяти М.А. Лаврентьева. Часть 2. Издательство Института Математики, – Новосибирск, 2000. – С. 103–104.
- [140] Шакенов К.К. Решение нестационарной задачи двухфазной фильтрации методами Монте–Карло. // Тезисы докладов на Международной конференции "Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы "Казахстан в третьем тысячелетии. 26 – 28 октября 2000 г. Институт математики МОиН РК, – Алматы, 2000 г. – С.
- [141] Шакенов К.К., Тастанов М.Г. О решении методами Монте–Карло регулярной и вырождающейся задач двухфазной фильтрации. // Вестник МОН Республики Казахстан, НАН РК 2000, 6. – Алматы, 2000. – С. 111–119.

7

Приложение

В приложении мы приведем некоторые численные эксперименты решения нестационарных линейризованных возмущенных уравнений и задачи фильтрации методами Монте–Карло .

А. Рассмотрим модельную задачу для $\Omega = \{0 \leq x, y \leq 1\}$:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{W} - \frac{1}{\varepsilon} \text{grad div } \vec{W} = \vec{f},$$

$$\vec{W} \Big|_{\partial Q} = 0, \quad \vec{W} \Big|_{t=0} = \vec{W}_0(x),$$

где $\vec{f} = (f_1, f_2)$, $f_1(x, y, t) = e^t(x(x-1)y(y-1) - 2\nu x(x-1) -$

$$-2y(e-1)(\nu + \frac{1}{\varepsilon}) - (2x-1)(2y-1)/\varepsilon)$$

$$f_2(x, y, t) = e^t(x(x-1)y(y-1) - 2\nu y(y-1) - 2x(x-1)$$

$$\times (\nu + \frac{1}{\varepsilon}) - (2x-1)(2y-1)/\varepsilon), \quad W_0(x) = (U_0(x), V_0(x)),$$

$$U_0(x) = V_0(x) = x(x-1)y(y-1).$$

Точное решение задачи $W = (U, V)$, $U(x, y, t) = V(x, y, t) = e^t x(x-1)y(y-1)$. При $\nu = 1.0, 10.0, 100.0$, $\varepsilon = 0.01, 0.05$, $K = 10000$, K – число траекторий, полученные результаты приближенного решения $\tilde{W} = (\tilde{U}, \tilde{V})$ во внутренних точках $x = y = 0.1$, $x = y = 0.5$, $x = y = 0.8$

приведены в таблице

Коэффициент вязкости ν	Коэффициент возмущения ε	Временные точки t	Пространственные точки $x = y$	Приближенное решение	Точное решение	Погрешность
1.0	0.01	0.000001	0.1	0.00893	0.00810	0.000836
1.0	0.01	0.000005	0.5	0.06173	0.06250	0.000772
1.0	0.01	0.00001	0.8	0.02480	0.02560	0.000798
1.0	0.05	0.000028	0.1	0.00723	0.00810	0.000873
1.0	0.05	0.00014	0.5	0.06192	0.06251	0.000584
1.0	0.05	0.00028	0.8	0.02642	0.02561	0.000816
10.0	0.05	0.00017	0.1	0.00897	0.00810	0.000874
10.0	0.05	0.00083	0.5	0.06275	0.06255	0.000199
10.0	0.05	0.00167	0.8	0.02499	0.02564	0.000653
100.0	0.05	0.00017	0.1	0.00785	0.00810	0.000247
100.0	0.05	0.00083	0.5	0.06288	0.06255	0.000324
100.0	0.05	0.00167	0.8	0.02544	0.02564	0.000200

Оценивалось решение одновременно во всех точках сетки, которую проходила траектория. При таком методе время счета растет медленно при увеличении числа узлов сетки. Шаг по времени $\tau = 10^{-6}$ для $\nu =$

1, $\varepsilon = 0.01$, $h = 0.1$; $\tau = 0.000028$ для $\nu = 1$, $\varepsilon = 0.05$, $h = 0.1$; $\tau = 0.0001666$ для $\nu = 10$, $\varepsilon = 0.05$, $h = 0.1$; и $\tau = 0.000166$ для $\nu = 100$, $\varepsilon = 0.05$, $h = 0.1$.

В. В области $Q = \Omega \times [0, T]$, где $\Omega = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$ – единичный куб с границей $\partial\Omega$, $\partial Q = \partial\Omega \times [0, T]$, рассматривается регулярная задача двухфазной фильтрации:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial s}{\partial t} &= \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0), \quad (x, t) \in Q, \\ \operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) &= 0, \quad (x, t) \in Q, \\ s(x, t) &= s_0(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ p(x, t) &= p_0(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ s(x, 0) &= s^0(x, 0), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

где m – пористость, $m = m(x)$, $K_0 = K_0(x)$ – тензор фильтрации для однородной жидкости, $K_i = K_0(x) \cdot k_{0i}(s)$ – симметричные тензоры фазовой проницаемости, $k_{0i}(s) = \frac{1}{\mu_i} \bar{k}_{0i}(s)$ – фазовые проницаемости для однородного изотропного грунта, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, $\bar{k}_{0i}(s)$ – относительные фазовые проницаемости, s_i – насыщенности,

$$0 < s_i^0 \leq s_i \leq 1 - s_j^0, \quad i \neq j, \quad s_1 + s_2 = 1, \quad s \equiv \frac{s_1 - s_1^0}{1 - s_1^0 - s_2^0}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

p_i – давления, $p_2 - p_1 = p_c(x, s)$ – капиллярное давление, $p = p_1 - \int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{02}}{k} d\xi + \rho_1 g h$ – "приведенное" давление, где $k(s) = k_{01}(s) + k_{02}(s)$, $g \nabla h = \vec{g}$, ρ_i – плотности жидкости, \vec{g} – сила тяжести.

$$a = -\frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{01} \cdot k_{02}}{k}, \quad \vec{f}_0 = K_1 \int_s^1 \nabla \frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{02}}{k} d\xi,$$

$$K = K_1 + K_2 = k \cdot K_0 = (k_{01} + k_{02}) \cdot K_0,$$

$$\vec{f} = K \int_s^1 \nabla \frac{\partial p_c}{\partial s} \cdot \frac{k_{02}}{k} d\xi + K_2 \nabla p_c + K_2 (\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{g}$$

ИЛИ

$$\vec{f} = K \cdot K_1^{-1} \vec{f}_0 + K_2 \nabla p_c + K_2 (\rho_2 - \rho_1) \cdot \vec{g},$$

$$\nabla p_c(x, s) = \nabla_x p_c(x, s) = \left(\frac{\partial p_c}{\partial x_1}, \frac{\partial p_c}{\partial x_2}, \frac{\partial p_c}{\partial x_3} \right).$$

Рассматриваются условия независимости суммарной скорости фильтрации от насыщения. Если коэффициенты $K(x, s) = K_0(x)k(s)$ и $\vec{f}(x, s)$ не зависят от s , то система уравнений распадается и допускает последовательное определение поля скорости \vec{v} и фазовых насыщенныхностей $s_i(x, t)$. В этом случае параметры модели Маскета–Левретта определяются следующим образом.

1. $k = k_{01}(s) + k_{02}(s) = \text{const}$ – предположение с достаточной степенью точности реализуется для смешивающихся жидкостей, для которых $k_{01}(s) = \lambda \cdot s$, $k_{02}(s) = \lambda(1 - s)$, $\lambda = \text{const}$. В случае несмешивающихся жидкостей существенное отклонение от постоянной наблюдается лишь вблизи предельных значений $s = 0, 1$ приведенной насыщенности.

2. $\frac{1}{\bar{m}(x)} \cdot \det K_0(x) = \text{const}$, при этом имеем $p_c = p_c(s)$, то есть $\frac{\partial p_c}{\partial x_3} = 0$.

3. Не учитываются силы тяжести $\vec{g} = 0$ или жидкости имеют одинаковые плотности $\rho_1 = \rho_2$. [9].

Введем обозначения:

$$A(x, s^j) \equiv - \frac{\partial p_c(s)}{\partial s} \Big|_{s=s^j} \cdot \frac{k_{01}(s^j) \cdot k_{02}(s^j)}{k(s^j)} \cdot \frac{1}{m(x)},$$

$$B_i(x) \equiv \frac{1}{K_0(x)} \cdot \frac{\partial K_0(x)}{\partial x_i}, \quad C(x, s^j) = \frac{k_{01}(s^j)}{m(x)}.$$

Тогда для определения давления $p(x, t)$ получим задачу

$$\Delta p(x, t) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \cdot \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad p(x, t) = p_0(x, t), \quad (x, t) \in \partial Q;$$

для определения $s^{j+1}(x)$ насыщенности получим задачу:

$$\begin{aligned} & \tau \cdot A(x, s^j) \cdot K_0(x) \cdot \Delta s^{j+1} + \tau \cdot A(x, s^j) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial K_0(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial s^{j+1}(x)}{\partial x_i} \\ & - s^{j+1}(x) = -\tau \cdot C(x, s^j) \cdot \left(K_0(x) \Delta p_\varepsilon(x, \tau j) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial K_0(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial p_\varepsilon(x, \tau j)}{\partial x_i} \right) \\ & + s^j(x), \quad x \in \Omega, \quad s^{j+1}(x) = s_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad s^0(x, 0) = s^0(x), \\ & \quad \quad \quad x \in \Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \Delta s^{j+1}(x) + \frac{1}{K_0(x)} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial K_0(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial s^{j+1}(x)}{\partial x_i} - \frac{1}{\tau \cdot A(x, s^j) \cdot K_0(x)} \cdot s^{j+1}(x) = \\ = -\frac{C(x, s^j)}{A(x, s^j)} \cdot \Delta p_\varepsilon(x, \tau j) - \frac{C(x, s^j)}{A(x, s^j) \cdot K_0(x)} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial K_0(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial p_\varepsilon(x, \tau j)}{\partial x_i} + \\ + \frac{s^j}{\tau \cdot A(x, s^j) \cdot K_0(x)}, \end{aligned}$$

$s^{j+1}(x) = s_0(x)$, $x \in \partial\Omega$, $s^0(x, 0) = s^0(x)$, $x \in \Omega$, $j = 0, 1, 2, \dots, M-1$, .
Окончательно получим

$$\begin{cases} \Delta p(x, \tau j) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \cdot \frac{\partial p(x, \tau j)}{\partial x_i} = 0, & (x, \tau j) \in Q, \\ p(x, \tau j) = p_0(x, \tau j), & (x, \tau j) \in \partial Q. \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \Delta s^{j+1}(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \cdot \frac{\partial s^{j+1}(x)}{\partial x_i} + \tilde{A}(x, s^j) \cdot s^{j+1}(x) = \\ = F(x, s^j, p_\varepsilon), & x \in \Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M-1, \\ s^0(x, 0) = s^0(x), & x \in \Omega, \\ s^{j+1}(x) = s_0(x), & x \in \Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M-1, \end{cases} \quad (7.2)$$

где $\tilde{A}(x, s^j) = \frac{1}{\tau \cdot A(x, s^j) \cdot K_0(x)}$, $F(x, s^j, p_\varepsilon) = -\frac{C(x, s^j)}{A(x, s^j)} \cdot \Delta p_\varepsilon(x, \tau j) -$
 $-\frac{C(x, s^j)}{A(x, s^j) \cdot K_0(x)} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial K_0(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial p_\varepsilon(x, \tau j)}{\partial x_i} + \frac{s^j}{\tau \cdot A(x, s^j) \cdot K_0(x)}$,

$p_\varepsilon(x, \tau j) - \varepsilon$ – смещенная оценка задачи 7.1 на j -ом временном слое;
 $\frac{\partial p_\varepsilon(x, \tau j)}{\partial x_i}$ и $\Delta p_\varepsilon(x, \tau j)$ также оцениваются методами Монте-Карло.

Предположим $A(x, s^j) = c_1 = const$, $K_0(x) = c_2 = const$, $C(x, s^j) = c_3 = const$. Тогда имеем $\frac{\partial K_0(x)}{\partial x_i} = 0$, $B_i(x) = \frac{1}{K_0(x)} \cdot \frac{\partial K_0(x)}{\partial x_i} = 0$.

И для определения приведенного давления $p(x, \tau j)$ получим

$$\begin{cases} \Delta p(x, \tau j) = 0, & x \in \Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \\ p(x, \tau j) = p_0(x, \tau j) & x \in \partial\Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \end{cases} \quad (7.3)$$

а для определения насыщенности $s^{j+1}(x)$ получим:

$$\begin{cases} \Delta s^{j+1}(x) - \alpha \cdot s^{j+1}(x) = -\beta \cdot s^{j+1}(x), & x \in \Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \\ s^{j+1}(x) = s_0(x), & x \in \partial\Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M - 1, \\ s^0(x, 0) = s^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (7.4)$$

где $\alpha = \frac{1}{\tau \cdot c_1 \cdot c_2}$, $\beta = \frac{1}{\tau \cdot c_3}$.

Для расчета давления и насыщенности в кубической области $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$ со сложными граничными и начальными условиями были рассмотрены задачи (7.3) и (7.4). Точное решение задачи (7.3) имеет вид $p(x, t) = \exp(t) \cdot (ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2) = \exp(\tau j) \cdot (ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2) = p(x, \tau j)$. Граничное условие и числовые параметры a, b, c были подобраны соответствующим образом. Точное решение задачи (7.4) имеет вид $s^{j+1}(x) = dx_1^2 + ex_2^2 + rx_3^2$. Входные данные: числовые параметры d, e, r, α, β , правая часть $-s^{j+1}(x)$, граничное условие $-s_0(x)$ и начальное условие $s^0(x)$ были подобраны соответствующим образом для временного слоя $j = 0$.

Для двух значений ε (ε – окрестность границы $\partial\Omega$) было оценено в точке $x_1 = 0.5, x_2 = 0.6, x_3 = 0.3$ и при $\tau = 0.1, j = 1, a = 5, b = -1, c = -4$ решение $p(x, \tau j)$ задачи (7.3) двумя алгоритмами: "блужданием по сферам" и "блужданием по границам". Для этих же значений ε и точки x при $j = 0, d = 0.5, e = 2.0, r = -4$ также было оценено решение $s^1(x)$ задачи (7.4) двумя алгоритмами. Количество траекторий для обоих алгоритмов равно 10000. Численные значения результатов расчета приведены в таблицах

Алгоритм "блуждания по сферам"

Оценки	Точное решение	Погрешность	Погрешность	Оценка
		для $\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.02$	
p	0.5857	0.0070	0.0075	0.592
s	0.7350	0.0070	0.0075	0.744

Алгоритм "блуждания по границам"

Оценки	Точное решение	Оценка
p	0.5857	0.573
s	0.7350	0,757

расчеты для разных ε проводились по одним и тем же траекториям. В качестве погрешностей для алгоритма "блуждания по сферам" взяты оценки среднеквадратичных отклонений.